

Dinâmica de duas partículas em um potencial do Tipo Calogero-Moser: Bohm e não localidade

Two particle dynamics in a Calogero-Moser type potential: Bohm and non-locality

Dinámica de dos partículas en un potencial del tipo Calogero-Moser: Bohm y no localidad

Jizreel Pereira da Silva¹
Roberta Oliveira Lenzi²
Carlos Henrique de Oliveira Barreto³
Daniel Guimarães Tedesco⁴

Resumo: Este artigo explora a interpretação de De Broglie-Bohm, focando na dinâmica de duas partículas sob um potencial Calogero-Moser com o objetivo de compreender a interpretação e a não-localidade do sistema, respondendo à pergunta: como é a dinâmica desse sistema na perspectiva proposta? Utiliza-se a equação de Schrödinger com o potencial mencionado, em conjunto com o emaranhamento e os sistemas de múltiplas partículas, para criar um modelo matemático a fim de realizar a análise das trajetórias com um simulador *open-source*. Como resultados, tem-se uma visão geométrica e matemática do emaranhamento e a abordagem de Bohm na mecânica quântica.

Palavras-chave: emaranhamento; não-localidade; Broglie-Bohm; mecânica quântica.

Abstract: This article explores the De Broglie-Bohm interpretation, focusing on the dynamics of two particles under a Calogero-Moser potential with the aim of understanding the interpretation and non-locality of the system, answering the question: What are the dynamics of this system from the proposed perspective? The Schrödinger equation with the mentioned potential is used, in conjunction with entanglement and multi-particle systems, to create a mathematical model to perform trajectory analysis with an open-source simulator. The results provide a geometric and mathematical view of entanglement and Bohm's approach to quantum mechanics.

Keywords: entanglement; non-locality; Broglie-Bohm; quantum mechanics.

¹ Bacharelado em Física, UNINTER, <https://orcid.org/0000-0002-7874-1648>. E-mail: jizreelsilva@yahoo.com.br

² Bacharelada em Física, UNINTER, <https://orcid.org/0009-0000-4846-8575>. E-mail: beta.lenzi@gmail.com

³ Bacharel em Física, UNINTER, <https://orcid.org/0009-0005-6516-5900>. E-mail: chbarreto18@gmail.com

⁴ Doutor em Física, UERJ, <https://orcid.org/0000-0002-7874-1648>. E-mail: daniel.te@uninter.com

Resumen: Este artículo explora la interpretación de De Broglie-Bohm, centrándose en la dinámica de dos partículas bajo un potencial de Calogero-Moser con el objetivo de comprender la interpretación y la no localidad del sistema, respondiendo a la pregunta: ¿cómo es la dinámica de ese sistema desde la perspectiva propuesta? Se utiliza la ecuación de Schrödinger con el potencial mencionado, en conjunto con el entrelazamiento y los sistemas de múltiples partículas, para crear un modelo matemático con el fin de realizar el análisis de las trayectorias con un simulador de código abierto. Como resultado, se tiene una visión geométrica y matemática del entrelazamiento y el enfoque de Bohm en la mecánica cuántica.

Palabras-clave: entrelazamiento; no localidad; Broglie-Bohm; mecánica cuántica.

Submetido 19/09/2023

Aceito 09/10/2024

Publicado 14/11/2024

Considerações Iniciais

A Mecânica Quântica (MQ) é a teoria que descreve o comportamento da matéria e da luz em escala atômica. Em escalas muito pequenas, os sistemas físicos se comportam de maneira diferente de tudo que se tem experiência direta. Esses sistemas não se comportam como ondas, partículas, nuvens, bolas de bilhar, pesos em molas ou quaisquer outras coisas que já se tenha visto. A luz, por exemplo, foi inicialmente considerada por Newton como composta de partículas, conforme discutido em sua obra *Opticks* (Newton, 1704). No entanto, os experimentos de Young (1804) demonstraram que a luz também exibe comportamento ondulatório. Posteriormente, Einstein (1905) mostrou que a luz pode se comportar como uma partícula em certas circunstâncias.

Com o intuito de estabelecer um modelo matemático para a dinâmica de partículas quânticas, Schrödinger (1927) recorreu à analogia entre a mecânica clássica e a óptica ondulatória, em conjunto com a relação de Planck-Einstein ($E = h\nu$). A partir disso, postulou a forma da equação de onda que melhor descreve o comportamento ondulatório de tais partículas. A equação encontrada utiliza o formalismo de Hamilton-Jacobi, como ponto de partida para desenvolver a equação de onda. A analogia entre a mecânica hamiltoniana e a óptica geométrica foi explorada, a fim de estender a natureza ondulatória à descrição da mecânica de partículas.

Considerando a abordagem estatística envolvida, é proposta uma regra, que considera as funções encontradas (complexo-conjugadas em sua natureza) como densidades de probabilidade, considerando o quadrado do módulo da função com peso estatístico. Essa é chamada de Regra de Born (1926).

Nesse ínterim, diversas interpretações foram propostas com a finalidade de explicar o mundo quântico, sendo a mais aceita a de Copenhague, com fortes influências do Círculo de Viena dos anos 1920, que tinham ideias positivistas e que influenciaram os catedráticos dessa interpretação, com Bohr como seu expoente maior. Apesar de mais aceita, ela é passível de crítica, principalmente no que tange ao seu postulado do colapso da função de onda (Pinto Neto 2010). Pode-se aqui citar algumas das alternativas conhecidas e usadas em diversas áreas, como a interpretação de universos múltiplos, das histórias consistentes (ou descoerentes), modal e a interpretação da onda piloto de Broglie-Bohm (Betz, 2014). Essa última sustenta que a função de onda de Schrödinger é um orientador que direciona a partícula, cuja localização, embora

possa ser indetectável, está claramente estabelecida em cada momento. (De Broglie, 1927; Bohm, 1952). Esse trabalho terá como perspectiva a de De Broglie-Bohm, na qual, levando a uma discussão sobre a fundamentação teórica da chamada onda piloto, visa-se descrever a dinâmica de duas partículas puntiformes (Broglie, 1927; Bohm, 1952).

Além de toda essa problemática das interpretações, é necessário lidar com o que é chamado na literatura da não-localidade quântica, inicialmente destacada no paradoxo EPR por Einstein, Podolsky e Rosen (1935). Esse paradoxo refere-se ao fenômeno em que as medições em sistemas quânticos multipartidos não podem ser explicadas por variáveis ocultas locais, que não se encaixam na noção clássica de realismo local. O teorema de Bell (1964) formalizou essa questão ao demonstrar que as previsões quânticas violam as desigualdades de Bell, implicando que qualquer teoria que busque substituir a mecânica quântica (MQ) deve abandonar o realismo local. Essas violações foram comprovadas experimentalmente, em uma série de testes das desigualdades de Bell (Aspect; Dalibard; Roger, 1982; Rowe *et al.*, 2001; Hensen *et al.*, 2015; Giustina *et al.*, 2015).

A não-localidade surge tanto no contexto da MQ quanto na mecânica bohmiana (MB). Na MB, a não-localidade se manifesta por meio da função de onda, que guia as trajetórias das partículas e depende da configuração global do sistema, independentemente da distância entre as partículas (Holland, 1993).

Dois trabalhos se destacam nesse sentido. Dürr, Goldstein e Zanghi (1992) argumentam que a aleatoriedade na MQ emerge da MB, uma teoria determinística. A distribuição inicial das partículas leva a incertezas que concordam com as previsões quânticas. O artigo introduz o conceito de equilíbrio quântico e sustenta que a incerteza quântica é inevitável, mesmo em um universo determinístico, e está de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg. Já o trabalho de Rafsanjani *et al.* (2024) investiga a interferência não-local no tempo de chegada de pares de átomos emaranhados, similar à interferência observada em distribuições de posição. Usando um experimento adaptado da dupla fenda e de um tratamento bohmiano, os autores demonstram uma relação de complementaridade entre as visibilidades de interferência de uma partícula e de duas partículas na distribuição temporal. Os resultados indicam que essa interferência temporal não-local é um comportamento universal em sistemas quânticos entrelaçados, que abrem novas possibilidades para testar distribuições de tempo de chegada na teoria bohmiana.

Nota-se que a pesquisa dos fundamentos da MQ ainda é profícua, com diversos problemas em aberto. Tanto as discussões sobre as interpretações quanto a formulação matemática estão em alta devido aos avanços da computação quântica, ótica quântica e das interpretações cosmológicas atuais (Pinto Neto, 2010). Sendo assim, é interessante destacar o conhecimento tanto epistemológico quanto prático desses princípios básicos, nessa abordagem escolhida como alicerce do trabalho. Logo, uma simulação computacional é adequada para uma compreensão geométrica, pois os objetos aqui utilizados têm um grau de complexidade elevado. Ademais, como uma pesquisa de base está bem relacionada a uma prática que dialoga com o ensino e a pesquisa, trazendo alternativas pedagógicas para discussões na educação superior, mais especificamente nas disciplinas de MQ no contexto do bacharelado em Física.

Metodologia

O objetivo desse trabalho é analisar a dinâmica de dois sistemas quânticos (de fato partículas) submetidas a um potencial do tipo Calogero-Moser na perspectiva de Bohm, que propôs um modelo que permite calcular a velocidade e posição de um sistema quântico, subsidiado pela onda piloto. Para compreender, do ponto de vista geométrico, foi utilizado um simulador *open-source* da plataforma *Wolfram Demonstrations Project* para demonstrar os gráficos das “Trajetórias surrealistas” (Holland, 1995; Wolfram, 2023).

Na sequência, será feita uma fundamentação teórica com foco nos aspectos fundamentais da MQ de Bohm, na definição de espaço de Hilbert e do emaranhamento, fechando com o estudo dos sistemas de muitas partículas no contexto de Bohm. Na modelagem matemática, feita com base na fundamentação teórica, a equação de Schrödinger com o potencial de Calogero-Moser foi proposta, com sua solução escrita em termos de polinômios de Laguerre com uma configuração correspondente. Ao final, foram feitas as análises geométricas utilizando o *applet* na plataforma *Wolfram Demonstrations Project*, que dá as trajetórias e velocidades das partículas. Dessa forma pôde-se vislumbrar tanto o emaranhamento quanto a abordagem de Bohm da MQ.

Faz-se importante finalizar, ressaltando as inter-relações entre MQ, emaranhamento e caos. No campo da mecânica quântica, a mecânica bohmiana oferece uma perspectiva única ao introduzir o conceito de trajetórias determinísticas para partículas guiadas pela função de onda (Wisniacki; Pujals, 2005). Essa natureza determinística permite um exame detalhado do

entrelaçamento quântico dentro do framework bohmiano. O entrelaçamento, um aspecto fundamental da mecânica quântica, foi explorado na mecânica bohmiana, mostrando como as dinâmicas entrelaçadas exigem a consideração de múltiplas configurações interativas de partículas bohmianas (Elsayed; Mølmer; Madsen, 2018). Isso destaca a relação intrincada entre as trajetórias bohmianas e o entrelaçamento em sistemas quânticos (Tzemos; Contopoulos; Efthymiopoulos, 2019). Além disso, a teoria do caos também encontrou seu lugar na mecânica bohmiana, esclarecendo o comportamento das trajetórias bohmianas. A emergência do caos nas trajetórias bohmianas foi associada aos repetidos espalhamentos das trajetórias com pontos específicos, como pontos nodais e X , dentro do sistema (Tzemos; Contopoulos; Efthymiopoulos, 2016). O estudo de trajetórias caóticas e ordenadas na mecânica bohmiana forneceu uma ideia sobre a dinâmica do equilíbrio quântico e o estabelecimento de regras probabilísticas sem a necessidade de postulação (Tzemos; Contopoulos, 2021; Contopoulos; Efthymiopoulos, 2008). Além disso, a interação entre o caos quântico e a mecânica bohmiana tem sido objeto de interesse, com investigações sobre a distinção entre a mecânica bohmiana e a mecânica quântica convencional por meio da lente da teoria do caos (Ivanov *et al.*, 2019). A presença do caos nas trajetórias bohmianas foi associada à geração de pontos críticos, como pontos nodais e X , que são fundamentais na indução do caos dentro do sistema (Tzemos; Contopoulos, 2023). Essa conexão entre o caos e os pontos críticos ressalta a relação complexa entre a dinâmica dos fluxos quânticos bohmianos e a manifestação de comportamento caótico.

Fundamentação Teórica

Dentro do processo significativo de compreensão e crítica da interpretação de Copenhagem da MQ, indagações foram suscitadas por Einstein, Podolsky e Rosen (1935) a respeito da completude da Mecânica Quântica (MQ). Antes de tudo, o emaranhamento quântico é um fenômeno em que duas ou mais partículas estão correlacionadas de forma inextricável, mesmo que estejam separadas por uma grande distância. Pode-se destacar que, enquanto na correlação clássica as propriedades das partículas estão previamente determinadas – realidade preexistente – no emaranhamento, as partículas não possuem estados definidos antes da medição, estando em uma superposição de estados. A medição de uma partícula emaranhada define instantaneamente o estado da outra, independentemente da distância, evidenciando uma correlação que não pode ser explicada por mecanismos clássicos (Schlosshauer, 2007).

O paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen (1935) baseado na ideia do emaranhamento quântico argumenta que, se a mecânica quântica é correta, então as partículas entrelaçadas devem ter propriedades ocultas (chamadas variáveis ocultas) que determinam seu estado antes de serem medidas. Essas variáveis adicionais deveriam restaurar a causalidade e a localidade na teoria. Contudo, Bell (1964) publicou um artigo mostrando que, se existirem as variáveis ocultas, então elas devem obedecer a certas desigualdades. Essas desigualdades, conhecidas como desigualdades de Bell, foram testadas experimentalmente várias vezes, e sempre foram violadas (Aspect; Dalibard; Roger, 1982).

Historicamente, é sugerida uma interpretação da teoria quântica em termos justamente dessas variáveis “ocultas” permitindo uma descrição precisa e contínua de todos os processos, mesmo ao nível quântico. Bohm (1952, 1957) não aceita as interpretações originais da MQ pela Escola de Copenhague, tendo um olhar não-relativista envolvendo as variáveis ocultas, em que as partículas descrevem trajetórias a partir de uma função de onda, tornando a descrição indeterminista para determinista. No formalismo bohmiano, as variáveis ocultas são tratadas como as condições iniciais do sistema, o que mantém o caráter probabilístico da mecânica quântica. Isso implica que, mesmo com o uso dessas variáveis, não é possível determinar com certeza qual das soluções da equação de trajetória descreve a partícula em uma instância experimental específica (Dürr; Goldstein; Zanghi, 2013).

Dentro dessa proposta, para a mecânica quântica não-relativística (MQNR), Brohm (1952, 1957) considerou os sistemas físicos compostos por partículas pontuais, descrevendo trajetórias quânticas no espaço. O interessante é que a formulação bohmiana não descarta a equação de Schrödinger, mas faz o acoplamento do conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, no qual se apresenta uma espécie de perspectiva newtoniana para uma partícula quântica.

Conforme Siqueira-Batista e Helayël-Neto (2008), a interpretação de Bohm para a mecânica quântica foi negligenciada devido a não-localidade e ao determinismo clássico. No entanto, o interesse por ela se renovou, pois os debates sobre o determinismo continuam e a não-localidade não é mais um problema tão grande, especialmente com teorias como a das cordas, que não são locais (Polchinski, 1998).

Mecânica Quântica de Bohm

A partir da equação de Schrödinger que modela a dinâmica das partículas em sistemas quânticos escrita como (Cohen-Tannoudji; Diu; Laloë, 2019):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad (1)$$

sendo \hbar a constante de Planck reduzida, $\Psi(\vec{r}, t)$ a função de onda complexa que descreve o estado quântico do sistema, m a massa do sistema estudado e ∇^2 o laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

A Regra de Born estabelece que a densidade de probabilidade $\rho(\vec{r}, t)$ associada à posição \vec{r} de uma partícula em um sistema quântico é dada pelo quadrado do módulo da função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ ⁵:

$$\rho(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)^* \Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2. \quad (3)$$

Essa densidade de probabilidade possui as seguintes propriedades importantes a serem enunciadas:

- A densidade de probabilidade $\rho(\vec{r}, t)$ é sempre positiva e é um número real, uma vez que é definida como o quadrado de um número complexo;
- A função de onda deve ser normalizada, o que significa que a integral da densidade de probabilidade sobre todo o espaço tridimensional deve ser igual a 1, garantindo que a partícula seja encontrada em algum lugar do espaço. Essa condição é expressa matematicamente como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\vec{r}, t)^* \Psi(\vec{r}, t) dV = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}, t) dV \quad (4)$$

Sendo dV o elemento de volume no espaço tridimensional.

A normalização assegura que a soma de todas as probabilidades possíveis de encontrar a partícula em qualquer ponto do espaço seja igual a 1, como esperado de uma distribuição probabilística. Precisa-se destacar também a equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (5)$$

⁵ Como a função de onda é complexa, precisa-se da contraparte complexo-conjugada $\Psi(\vec{r}, t)^*$.

Sendo:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = i \frac{\hbar}{2m} [\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi] = \frac{\hbar}{m} \text{Im}[\Psi^* \vec{\nabla} \Psi] \quad (6)$$

A densidade de corrente $\vec{j}(\vec{r}, t)$ escrita em termos da função de onda.

Sendo assim, para ser falado sobre a onda piloto de forma breve, pode-se associar a continuidade (5) com as equações (3) e (6) em uma perspectiva da mecânica dos fluidos, obtendo o campo vetorial de velocidades do fluido.

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{j}(\vec{r}, t)}{\rho(r, t)} = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \frac{[\Psi^* \vec{\nabla} \Psi]}{|\Psi|^2} = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \frac{\nabla \Psi(r, t)}{\Psi(r, t)} \quad (7)$$

Pinto Neto (2010) explica que De Broglie propôs uma alteração fundamental nos princípios da mecânica newtoniana, na qual toda partícula, independentemente de estar livre ou não, tem sua velocidade determinada por uma onda, conforme descrito na eq. (8).

Forma polar da função de onda e postulados de De Broglie-Bohm

Para compreender o conceito de partícula em mecânica quântica e os postulados de De Broglie-Bohm, escreve-se a função de onda em sua forma polar, decompondo a função de onda em duas partes: uma parte relacionada à amplitude da função (intensidade) e outra parte relacionada à fase (ou oscilação):

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} \exp\left(\frac{iS(\vec{r}, t)}{\hbar}\right). \quad (8)$$

Sendo $\sqrt{\rho(\vec{r}, t)}$ a amplitude real e $S(\vec{r}, t)$ a fase da função de onda. Esse formato polar da função de onda permite visualizar a função como algo que possui uma magnitude e uma fase.

Agora, ao expandir essa função de onda, pode-se expressá-la em termos de suas partes real e imaginária:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + i\psi_2(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} \cos\left(\frac{S(\vec{r}, t)}{\hbar}\right) + i\sqrt{\rho(\vec{r}, t)} \text{sen}\left(\frac{S(\vec{r}, t)}{\hbar}\right) \quad (9)$$

Com a fase da função de onda expressa como:

$$S/\hbar = \tan^{-1}(\psi_2/\psi_1) = \frac{1}{2i} \log(\Psi/\Psi^*) \quad (10)$$

Relacionando-se com a razão entre as partes imaginária e real da função de onda. Para ir na direção da dinâmica da onda-piloto com o auxílio do formalismo de Hamilton-Jacobi, utiliza-se a forma polar da função de onda dada pela eq. (5), inserida na equação de Schrödinger (1), pode-se encontrar duas equações diferenciais parciais:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} [\vec{\nabla} S(\vec{r}, t)]^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 (\sqrt{\rho(\vec{r}, t)})}{\sqrt{\rho(\vec{r}, t)}} + V(\vec{r}, t) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{\vec{\nabla} S(\vec{r}, t)}{m} \right) = 0 \quad (12)$$

O formalismo de Hamilton Jacobi, em conjunto com o conhecimento de mecânica dos fluídos, providencia uma relação que o momento \vec{p} e a velocidade \vec{v} são:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{\nabla} S(\vec{r}, t) \quad (13)$$

Pode-se, enfim, enunciar os postulados de:

1. Um sistema físico individual consiste em uma onda que se propaga no espaço e no tempo, juntamente com uma partícula pontual que se move continuamente sob a orientação dessa onda.
2. A onda é descrita matematicamente pela função $\Psi(\vec{r}, t)$, que é uma solução da equação de Schrödinger.
3. O movimento da partícula é dado pela solução $\vec{r}(t)$ da *guidance equation*:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \left(\frac{\nabla S(\vec{r}, t)}{m} \right)_{\vec{r}=\vec{r}(t)} \quad (14)$$

Com a condição inicial $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ especificada para resolver essa equação, e que com diferentes valores de \vec{r}_0 tem-se um conjunto de possíveis trajetórias para a partícula.

4. A probabilidade de que uma partícula esteja entre \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$ no tempo t é dada por $\rho(\vec{r}, t_0) d^3r$. Esse postulado seleciona, entre todas as possíveis trajetórias, aquelas compatíveis com a distribuição inicial de probabilidades.

Esses postulados formam a base de uma teoria causal do movimento de partículas, na qual o aspecto probabilístico é secundário e subsidiário a uma descrição causal dos processos individuais.

Voltando a atenção a equação (11), pode-se notar que o formalismo de Hamilton-Jacobi traz um novo potencial:

$$Q(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 (\sqrt{\rho(\vec{r}, t)})}{\sqrt{\rho(\vec{r}, t)}}, \quad (15)$$

Esse potencial vai proporcionar uma equação de movimento newtoniana escrita como:

$$\vec{F} = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -\vec{\nabla}V - \vec{\nabla}Q. \quad (16)$$

Nesse contexto, o potencial quântico introduz uma “força adicional” à componente clássica, que guia o movimento da partícula de acordo com a equação bohmiana. Diferente do formalismo clássico, que requer tanto posições quanto velocidades iniciais, o formalismo bohmiano precisa apenas das condições iniciais de posição, pois as velocidades são determinadas diretamente pela função de onda, conforme a equação de trajetória de primeira ordem. Além disso, apesar de se ter as trajetórias determinadas pelas condições iniciais, a incerteza do observador se deve à falta de conhecimento sobre essas condições, não por um caráter não determinístico. Essas condições iniciais, embora não observáveis, seguem uma distribuição de probabilidade descrita pela regra de Born no instante $t = 0$, conforme a hipótese de equilíbrio quântico ou de tipicidade (Holland, 1994). Essa hipótese garante que, assumindo uma distribuição inicial típica das posições, as previsões estatísticas da teoria bohmiana coincidem com as da mecânica quântica convencional, como estabelecido pelo princípio da equivariância. Conforme demonstrado por Dürr, Goldstein e Zanghi (1992, 2012), a regra de Born permanece válida ao longo do tempo, a partir da hipótese de tipicidade e da equação de continuidade, oferecendo uma interpretação, estatisticamente, consistente da mecânica quântica.

Espaço de Hilbert e emaranhamento

Sabe-se que o primeiro postulado da MQ é a proposta matemática sobre um estado quântico. A proposta é que um estado quântico é descrito por um vetor de estado unitário no espaço de Hilbert \mathcal{H} , que é um espaço vetorial complexo (Cohen-Tannoudji; Diu; Laloë, 2019).

$$\mathcal{H} = \{|\psi\rangle / \langle\psi|\psi\rangle = 1, \langle^\circ|^\circ\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}\} \quad (17)$$

Seguindo esse raciocínio e introduzindo com a discussão no espaço de fase, esse estudo observa o aspecto da MQ de sistemas compostos. As partículas possuem seu próprio espaço de fase \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , com bases⁶ $\{|m^{(1)}\rangle\}$, $m = 1, 2 \dots$ e $\{|n^{(2)}\rangle\}$, $n = 1, 2 \dots$ respectivamente, com seus produtos internos hermitianos bem definidos. Contudo, sistemas compostos de duas partículas são construídos tomando o produto tensorial de seus espaços de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Um vetor de estado $|\psi\rangle$ que pertence a \mathcal{H} é escrito:

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n} |m^{(1)}\rangle \otimes |n^{(2)}\rangle \equiv \sum_{m,n} c_{m,n} |m^{(1)}n^{(2)}\rangle \quad (18)$$

Sendo $c_{m,n} = \langle m^{(1)}n^{(2)} | \psi \rangle$.

O que constitui a base para o espaço produto, levando a um produto interno na forma:

$$\langle m^{(1)}n^{(2)} | m'^{(1)}n'^{(2)} \rangle \equiv \langle m^{(1)} | m'^{(1)} \rangle \langle n^{(2)} | n'^{(2)} \rangle = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (19)$$

Sendo δ_{ij} o delta de Kronecker definido como $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{i \neq j} = 0$. Tomando outro vetor de estado $|\psi'\rangle \in \mathcal{H}$, o produto interno é dado por (Piza, 2009).

$$\langle \psi | \psi' \rangle \equiv \sum_{m,n} c_{m,n}^* c'_{m,n} = (\langle \psi' | \psi \rangle)^* \quad (20)$$

Definindo então a normalização do vetor de estado de \mathcal{H} como:

$$\langle \psi | \psi \rangle = |c_{m,n}|^2 = 1 \quad (21)$$

Pode-se perceber o estado emaranhado, tomando como base, um sistema composto, ou seja, um sistema emaranhado é sempre escrito como produto tensorial dos estados individuais. Esse estado emaranhado é destruído quando existe o processo de medição (Cohen-Tannoudji; Diu; Laloë, 2019). Para esclarecer de forma categórica o que significa um sistema emaranhado, define-se: se um estado $|\psi\rangle_{AB}$ que faz parte do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é chamado de fatorável se:

$$|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B ; |\phi\rangle_A \in \mathcal{H}_A, \quad |\varphi\rangle_B \in \mathcal{H}_B \quad (22)$$

Se não é possível ser fatorável, é chamado de emaranhado. Exemplificando, definindo dois vetores de estados $|\psi\rangle_1$ e $|\psi\rangle_2$ escritos como superposição de vetores de base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ na forma:

⁶ Considere a notação aqui como $m^{(1)}$ os números quânticos da partícula 1 e $n^{(2)}$ os números quânticos da partícula 2.

$$|\psi\rangle_1 = m_0|0\rangle + m_1|1\rangle, \quad |\psi\rangle_2 = n_0|0\rangle + n_1|1\rangle \quad (23)$$

Tem-se um estado fatorável (ou separável) se for possível escrever:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{12} &= |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = (m_0|0\rangle + m_1|1\rangle) \otimes (n_0|0\rangle + n_1|1\rangle) \\ |\psi\rangle_{12} &= m_0n_0|00\rangle + m_0n_1|01\rangle + m_1n_0|10\rangle + m_1n_1|11\rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Exemplos de estados emaranhados são os chamados estados de Bell:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (25)$$

Esses não podem ser escritos na forma separável, pois não existe solução para o sistema de equações que surge ao estudar os coeficientes e suas relações. Agora, precisa-se de um formalismo que permita calcular a dinâmica desses estados emaranhados. Faz-se, para isso, uma abordagem clássica, na projeção do espaço de Hilbert no espaço das coordenadas, levando a uma EDP semelhante a equação (1).

Sistemas de muitas partículas

Para definir um sistema com n partículas precisa-se construir uma função de onda única, que tenha a informação de todas as partículas. No formalismo padrão, o estado puro com n partículas pode ser definido como (Holland, 2004):

$$|\psi\rangle = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) |\vec{x}_1\rangle |\vec{x}_2\rangle \dots |\vec{x}_n\rangle \quad (26)$$

Sendo $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n | \psi \rangle$ e $|\vec{x}_i\rangle$ é o autoestado de posição de uma i -ésima partícula. A evolução temporal desse estado também é a equação de Schrodinger, escrita na notação de Dirac:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (27)$$

Para um sistema com duas partículas, que constitui a base do trabalho, faz-se de forma adequada. As equações de movimento, projetadas no espaço das posições são:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t)}{\partial t} = \left[- \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 \right) + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \right] \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \quad (27)$$

Sendo a massa m_i da i -ésima partícula e ∇_i^2 o operador laplaciano em função da posição de cada partícula. Da mesma maneira feita anteriormente, indo na direção da dinâmica de uma onda-piloto reescreve-se:

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) = R(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \exp \frac{i}{\hbar} S(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \quad (28)$$

levando às equações em função das coordenadas $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\vec{\nabla}_i S)^2}{2m_i} \right) + Q + V = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \vec{\nabla}_i \cdot \left(\frac{R^2 \vec{\nabla}_i S}{m_i} \right) = 0 \quad (30)$$

Com o termo Q definido como:

$$Q = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hbar^2}{2m_i R} \nabla_i^2 R \right)$$

Interpretado aqui como a energia potencial quântica para n partículas. Os próximos passos são semelhantes aos já definidos anteriormente.

Modelagem matemática: partículas submetidas a um potencial de Calogero-Moser

Realiza-se operações em um dos simuladores dos projetos na plataforma Wolfram para interpretar geometricamente como se dá a análise bohmiana (Bloch, 2016). O simulador utilizado descreve a dinâmica de um sistema com um potencial de interação do tipo Calogero-Moser, aqui já definido para duas partículas com posições x e y :

$$V(x, y) = \left(x^2 + \frac{\gamma_x}{x^2} \right) + \left(y^2 + \frac{\gamma_y}{y^2} \right) \quad (31)$$

Com duas constantes de acoplamento γ_x e γ_y . Esse potencial não acopla diretamente as duas partículas, ou seja, não existe termo cruzado entre x e y . Ele pode ser interpretado como um potencial com duas contribuições, sendo uma do tipo oscilador harmônico e outra do tipo coulombiana de grau 2. Inserindo o potencial na equação de Schrödinger tem-se:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_p} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \left(x^2 + \frac{\gamma_x}{x^2} \right) + \left(y^2 + \frac{\gamma_y}{y^2} \right) \right] \psi(x, y, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, t) \quad (32)$$

O simulador em questão foi escrito com a escolha de valores $\gamma_x = \gamma_y = 2$ para as constantes de acoplamento, $m_p = \frac{1}{2}$ para a massa das partículas e $\hbar = 1$. Essa equação descreve a dinâmica de uma função de onda geral, que contém contribuições de duas partículas. Para ter

estados emaranhados, precisa-se de alguns critérios. Para isso, construiu-se uma função de onda ψ com os parâmetros $a \in \mathbb{R}$ e uma fase $\delta \in \mathbb{R}$ na forma:

$$\psi(x, y, t) = e^{i\delta} \psi_{00} e^{-iE_{00}t} + e^{i\delta} \psi_{01} e^{-iE_{01}t} + \psi_{10} e^{-iE_{10}t} + a\psi_{11} e^{-iE_{11}t} \quad (33)$$

Para continuar, faz-se necessário lembrar que se está resolvendo uma equação diferencial parcial, e a dinâmica de solução usada aqui é a separação de variáveis (ver apêndice). Nessa categoria de potencial, a solução é escrita em termos de polinômios de Laguerre associados:

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y, t) = \left(x^{a_x + \frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} L_{n_x}^{a_x}(x^2) \right) \left(y^{a_y + \frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} L_{n_y}^{a_y}(y^2) \right) e^{-iE_{n_x, n_y} t} \quad (34)$$

Sendo $L_{n_x}^{a_x}(x^2)$ e $L_{n_y}^{a_y}(y^2)$ polinômios de Laguerre associados na representação da fórmula de Rodrigues:

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^x x^{n+k}), \quad (35)$$

As constantes,

$$a_x = \frac{1}{2}(1 + 4\gamma_x)^{1/2}, \quad a_y = \frac{1}{2}(1 + 4\gamma_y)^{1/2} \quad (36)$$

Usando essas ferramentas que vêm da solução das equações diferenciais parciais, os autoestados de energia são dados por:

$$E_{n_x, n_y} = 4(n_x + n_y + 1) + 2(a_x + a_y) \quad (37)$$

Para que haja emaranhamento, precisa-se voltar à equação (24) e comparar com a autofunção. Aqui precisa-se considerar que, apesar de não se ter um critério consistente para verificar se as autofunções representam estados emaranhados (Sun; Zubairy, 2012) após os cálculos da velocidade, tem-se um indicativo de emaranhamento baseado na constante a . A literatura atual possui critérios com o uso da matriz densidade e com vetores no espaço de Dirac sob certas circunstâncias, mas com funções de onda ainda não existe nada categórico (Sun; Zubairy, 2012).

Considera-se as posições iniciais das partículas para x_0 e y_0 para escolha livre das partículas na integração numérica das velocidades dessas, a partir da eqs. (10) e (14). As velocidades v_x e v_y das partículas 1 e 2, respectivamente, possuem uma dependência explícita de x, y, δ, a e t , e podem ser vistas no Apêndice 2, nas equações em (A1).

Por fim, vê-se na próxima seção uma simulação que mostra o movimento no espaço de configuração, no espaço real e no espaço de fase, de modo que o espaço de fase consiste em todos os valores possíveis das variáveis de posição e velocidade (Bloch, 2016). O grau de entrelaçamento é representado pelo parâmetro a .

Para $a = 1$, a função de onda é fatorizável no espaço de configuração. O movimento é periódico e as partículas se comportam independentemente uma da outra. A posição inicial de uma partícula não afeta o movimento da outra partícula, ou seja, não há emaranhamento.

Para $a = 0$, o movimento das duas partículas se torna emaranhado e caótico, dependendo do deslocamento de fase constante δ . A posição inicial de uma partícula afeta o movimento da outra partícula no espaço real. Contudo, é necessário ressaltar que o comportamento caótico precisa ser verificado matematicamente, o que não faz parte do escopo desse trabalho.

Um fato que chama a atenção é que o valor das velocidades no caso de $a = 1$ são dependentes apenas das posições de suas partículas individualmente, revelando um indício de não-emaranhamento por meio das equações:

$$v_x(x, \delta, t) = \frac{16x \operatorname{sen}(\delta + 4t)}{(20 - 8x^2) \operatorname{cos}(\delta + 4t) + 4(x^2 - 5)x^2 + 29} \quad (40)$$

$$v_y(y, t) = \frac{16y \operatorname{sen}(4t)}{(20 - 8y^2) \operatorname{cos}(4t) + 4(y^2 - 5)y^2 + 29} \quad (41)$$

Pode-se perceber também que a velocidade v_{x_2} não depende da fase δ , inserida *ad hoc* na resolução do problema.

Análise dos dados e Resultados: Uso da simulação computacional e o grau de emaranhamento

A simulação computacional utilizada para verificar está posta na plataforma *Wolfram Demonstrations Project*, que é uma biblioteca de demonstrações interativas criadas por usuários do *Mathematica*, verificadas por um comitê interno e disponibilizadas na sequência no site (Wolfram, 2023).

A operação do *applet* é livre no ambiente do *site*. O ícone "*time steps*" pode ser utilizado para definir até 50 passos do tempo da animação. O ícone da constante de fase δ permite a variação desse fator. O parâmetro a desempenha um papel fundamental na análise do grau de

emaranhamento entre as partículas. O ícone das posições iniciais das duas partículas possibilita a definição da posição inicial. Por fim, a escolha entre a análise da configuração, no espaço de configuração, que observa as coordenadas de posição, ou no espaço de fase, que já considera a velocidade das partículas, pode ser feita pelo usuário.

No contexto dessa simulação computacional, o espaço de configuração que se utiliza, refere-se ao espaço bidimensional em que as trajetórias das partículas são projetadas, sendo esse um espaço geométrico de posições. Nesse espaço, os parâmetros a e δ são elementos de modulação das interações entre as partículas.

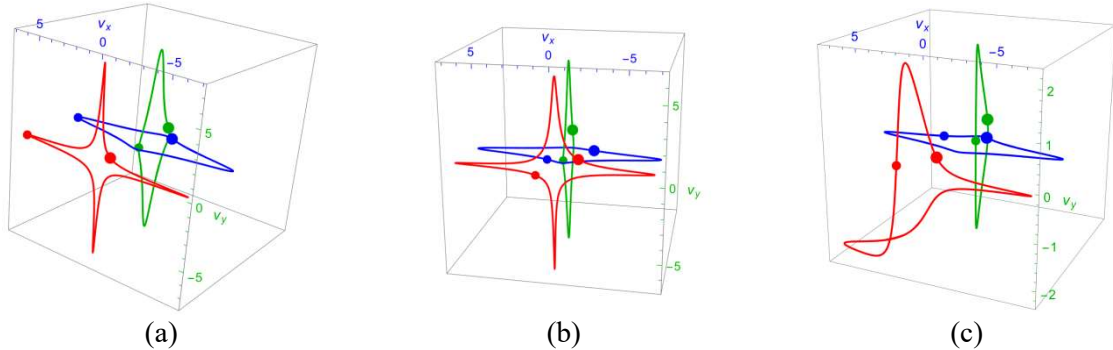
Em sistemas dinâmicos, o caos se manifesta por meio da sensibilidade do sistema às condições iniciais e da imprevisibilidade das trajetórias ao longo do tempo, mesmo em sistemas regidos por leis determinísticas. Nesse contexto, a ergodicidade surge como a propriedade na qual as trajetórias do sistema percorrem a totalidade do espaço de fase disponível ao longo do tempo, implicando que cada ponto nesse espaço é eventualmente visitado, embora de maneira imprevisível. (Lichtenberg; Lieberman, 1992).

Quando se analisa sistemas dinâmicos clássicos, o fenômeno das bifurcações é frequentemente observado como uma transição qualitativa entre regimes com comportamentos distintos, como a passagem de trajetórias ordenadas para caóticas à medida em que pequenos parâmetros do sistema são alterados (Guckenheimer; Holmes, 1983). No entanto, no caso dessa simulação, as mudanças observadas nas trajetórias das partículas são mais bem interpretadas como transições entre diferentes padrões de comportamento dinâmico, modulados pelo parâmetro a , que controla o grau de emaranhamento entre as partículas.

De acordo com a literatura, esse comportamento pode estar relacionado à transição entre diferentes regimes, como observado em sistemas bohmianos, em que o caos quântico e o emaranhamento influenciam diretamente as dinâmicas das partículas (Tzemos; Contopoulos; Efthymiopoulos, 2016; 2019; 2021).

No âmbito das equações (24) e (33), o emaranhamento ocorrerá se a função de onda não for fatorável, no qual a superposição quântica produz um estado de produto, pois ocorrerá a independência das componentes de coordenadas no espaço de configuração. Para equivalência entre as quantidades, x e v_x representam, respectivamente, a trajetória e a velocidade da partícula azul enquanto y e v_y representam, respectivamente, a trajetória e a velocidade da partícula verde.

Figura 1 – Trajetórias no espaço das velocidades com $a = 1$

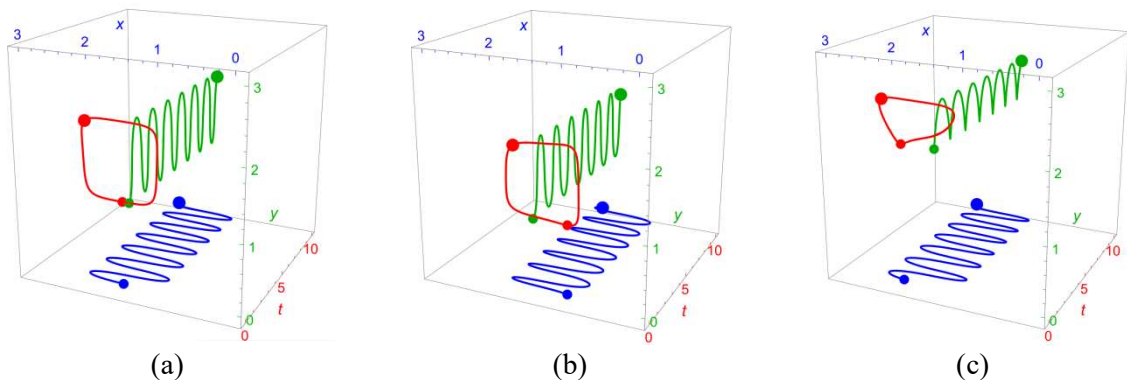


Fonte: Bloh (2013)

Na figura 1 tem-se 3 gráficos com o comportamento das trajetórias com valor igual a 1. Essa análise é realizada no espaço de fase, levando em conta as coordenadas de velocidade das partículas. O valor da constante de fase é 1.5, e um intervalo de tempo de 50 unidades. A figura 1(a) possui posições iniciais (1.6, 1.2) enquanto as figuras 1(b) e 1(c) possuem posições iniciais (1, 1) e (2, 2), respectivamente. Apesar das diferenças nas condições iniciais, pode-se notar geometricamente um comportamento não caótico.

O suporte para essa percepção vem ao analisar os gráficos na figura 2, que possui as mesmas configurações anteriores, mas agora no espaço das configurações. Vinculando ao caos em sistemas bohmianos, percebe-se, pela sugestão da literatura, a ausência de emaranhamento e a não manifestação do efeito da não-localidade nesse caso (Tzemos; Contopoulos; Efthymiopoulos, 2016; 2019; 2021).

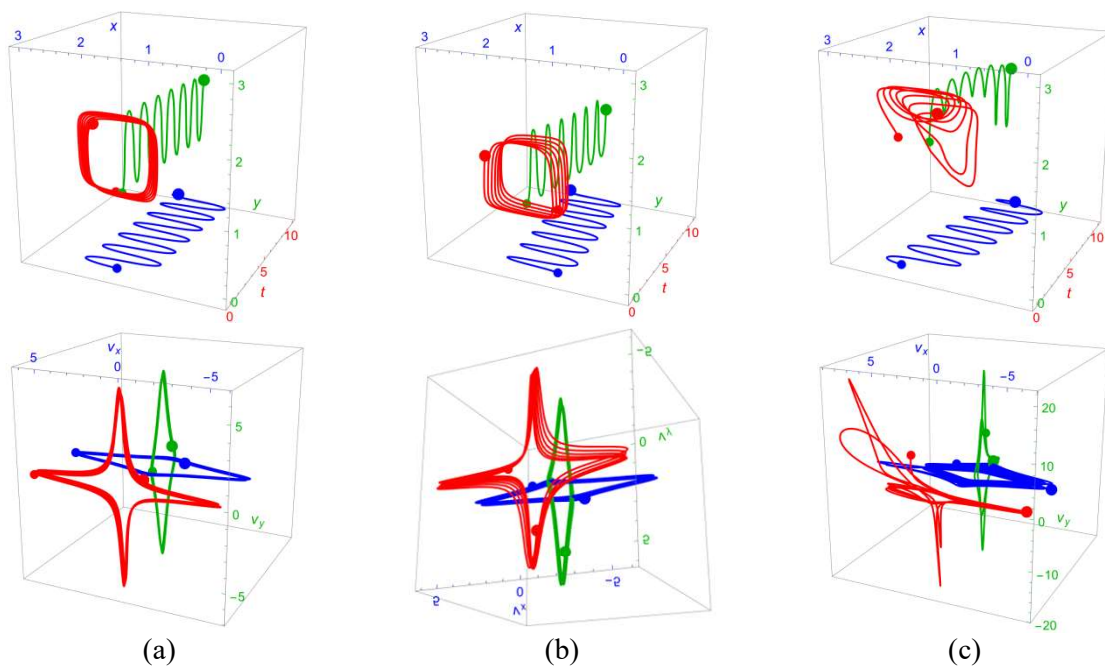
Figura 2 – Trajetórias no espaço das configurações com $a = 1$



Fonte: Bloh (2013)

Mantendo a fase $\delta = 1.5$, varia-se o grau de emaranhamento para $a = 0.8$ e pode-se notar uma mudança nas trajetórias em ambas as configurações na figura 3. Mantem-se, também, as posições iniciais: 3(a) possui posições iniciais (1.6, 1.2) enquanto as figuras 3(b) e 3(c) possuem posições iniciais (1, 1) e (2, 2), respectivamente. Será mantida essa configuração na figura 4.

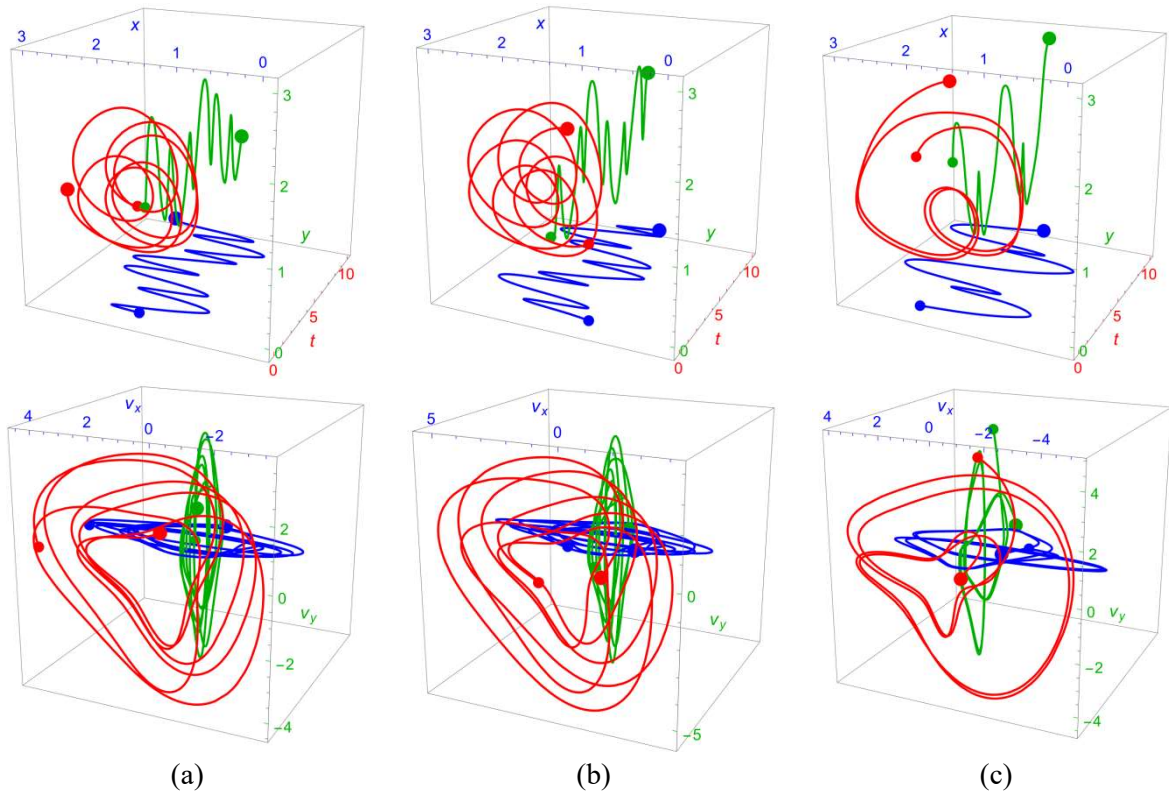
Figura 3 - Trajetórias no espaço das configurações e das velocidades com $a = 0.8$



Fonte: Bloh (2013)

Nesse cenário, pode-se observar pelos gráficos o início de um comportamento caótico, que segundo Tzemos e Contopoulos (2020) o grau de caos depende diretamente da força do emaranhamento. Sistemas fortemente emaranhados tendem a exibir trajetórias mais caóticas e ergódicas, enquanto sistemas com grau de emaranhamento menor têm maior proporção de trajetórias ordenadas (Tzemos; Contopoulos, 2020).

Figura 4 – Trajetórias no espaço das configurações e das velocidades com $a = 0$



Fonte: Bloh (2013)

Na Figura 4, observa-se um comportamento marcadamente caótico, caracterizado por trajetórias com certo grau de irregularidade, tanto no espaço das configurações quanto no espaço das velocidades. A ausência de um padrão previsível nas trajetórias dessas partículas é uma característica central do caos em sistemas quânticos (Ott, 2002).

Considerações Finais

Esse trabalho foi conduzido com o objetivo de identificar, de forma geométrica, a dinâmica bohmiana de um sistema de duas partículas, com o adicional emaranhamento prescrito como um *ansatz* na solução da EDP. Inicialmente, apresentou-se diversas interpretações da mecânica quântica, com ênfase na interpretação de Copenhague, amplamente aceita pela comunidade científica. Ao longo do estudo, explora-se os fundamentos necessários para compreender a dinâmica de partículas sob a equação de Schrödinger com o potencial de Calogero-Moser.

Do ponto de vista geométrico, com o uso do *applet*, foi identificado por meio das equações propostas, com o parâmetro a inserido *ad hoc*, que o emaranhamento está configurado com seu valor $a = 0$. Foi observado um comportamento não-local com algum grau de caos, levando a conclusão de que se teria um estado emaranhado, apesar da falta de critérios mais fortes para ratificar o emaranhamento de fato.

Os gráficos mostraram que a posição inicial de uma partícula influencia diretamente a trajetória da outra, corroborando a ideia de que o emaranhamento quântico condiciona o movimento das partículas de forma interdependente. Matematicamente, essa interdependência se manifesta quando a função de onda não pode ser fatorada no espaço de configuração, o que indica que os movimentos das partículas estão intrinsecamente correlacionados.

Embora se tenha observado indícios de emaranhamento e não-localidade, ainda faltam critérios matemáticos mais rigorosos para validar de forma definitiva esses fenômenos em sistemas quânticos bohmianos. Por isso, futuros trabalhos devem se concentrar no desenvolvimento de ferramentas analíticas mais robustas para estudar o emaranhamento, além de investigar o comportamento caótico dessas partículas.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Centro Universitário Internacional UNINTER e à Fundação Wilson Picler de Amparo à Educação, Ciência e Tecnologia pelo apoio, assim como à disponibilidade do PhD Klaus Von Bloh, autor da simulação, por seus comentários sobre a programação e os parâmetros utilizados na modelagem matemática.

Referências

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions**: with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover Publications, 1965. Disponível em: https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf. Acesso em: 24 out. 2024.

ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. **Physical Review Letters**, New York, v. 49, n. 25, p. 1804-1807, 1982. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.1804>. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.49.1804>. Acesso em: 23 out. 2024.

BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. **Physics Physique Fizika**, New York, n. 3, p. 195-200, 1964. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>. Disponível em: <https://journals.aps.org/ppf/pdf/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>. Acesso em: 23 ago. 2023.

BETZ, M. E. M. Elementos de mecânica quântica da partícula na interpretação da onda piloto. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, SP, v. 36, n. 4, p. 1-14, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172014000400011>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/ZwJFPncfzjWscDv4yQySd4R/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 23 out. 2024.

BLOH, K. V. Nonlocality in the De Broglie-Bohm interpretation of quantum mechanics. **Wolfram Demonstrations Project**, Champaign, IL, 21 Mar. 2016. Disponível em: <https://demonstrations.wolfram.com/NonlocalityInTheDeBroglieBohmInterpretationOfQuantumMechanic/>. Acesso em: 20 out. 2024.

BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. I. **Physical Review**, New York, v. 85, n. 2, p. 166-179, 1952a. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.166>. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.85.166>. Acesso em: 23 out. 2024.

BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. II. **Physical Review**, New York, v. 85, n. 2, p. 180-193, 1952b. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.166>. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.85.166>. Acesso em: 23 out. 2024.

BOHM, D. **Causality and chance in modern physics**. Philadelphia: Routledge & Kegan Paul and D. Van Nostrand Company, 1957. Disponível em: <https://www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=1362682>. Acesso em: 23 out. 2024.

BORN, M. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. **Zeitschrift für Physik**, Berlin, v. 37, n. 12, p. 863-867, 1926. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/bf01397477>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01397477>. Acesso em: 23 out. 2024.

BROGLIE, L. La nouvelle dynamique des quanta. In: BROGLIE, L. **Electrons et photons: rapports et discussions du cinquième conseil de physique solvay**. Paris: Gauthier-Villars, 1927.

COHEN-TANNOUJJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics: volume 1: Basic concepts, tools, and applications**. 2.ed. Weinheim: Wiley-VCH, 2019.

CONTOPOULOS, G.; EFTHYMIPOULOS, C. Ordered and Chaotic Bohmian Trajectories. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Dordrecht, v. 102, n. 1-3, p. 219-239, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10569-008-9127-8>. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008CeMDA.102..219C/abstract>. Acesso em: 23 out. 2024.

DÜRR, D.; GOLDSTEIN, S.; ZANGHÌ, N. **Quantum Physics Without Quantum Philosophy**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.

DÜRR, D.; GOLDSTEIN, S.; ZANGHÌ, N. Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty. **Journal of Statistical Physics**, New York, v. 67, n. 5-6, p. 843-907, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01049004>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01049004>. Acesso em: 24 out. 2024.

EINSTEIN, A. On a heuristic point of view concerning the production and transformation of light. **Annalen der Physik**, Berlin, v. 17, n. 6, p. 132-148, 1905. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053220607>. Disponível em: <https://www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=2291185>. Acesso em: 23 out. 2024.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, New York, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/physrev.47.777>. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.47.777>. Acesso em: 23 out. 2024.

ELSAYED, T. A.; MØLMER, K.; MADSEN, L. B. Entangled quantum dynamics of many-body systems using Bohmian trajectories. **Scientific Reports**, London, v. 8, 12704, 2018. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/s41598-018-30730-0>. Acesso em: 23 out. 2024.

GIUSTINA, M. Significant-loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons. **Physical Review Letters**, New York, v. 115, n. 25, p. 1-7, 2015. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.115.250401>. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.115.250401>. Acesso em: 23 out. 2024.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields**. New York: Springer-Verlag, 1983.

HENSEN, B. et al. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. **Nature**, London, v. 526, n. 7575, p. 682-686, 2015. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/nature15759>. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/nature15759>. Acesso em: 23 out. 2024.

HOLLAND, P. R. **The quantum theory of motion: an account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

IVANOV, I.; NAM, C. H.; KIM, K. T. Quantum chaos in strong field ionization of hydrogen. **Journal of Physics B: Atomic Molecular and Optical Physics**, Bristol, v. 52, n. 22, 2019. DOI: 10.1088/1361-6455/ab46f1. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019JPhB...52v5002I/abstract>. Acesso em: 24 out. 2024.

LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and chaotic dynamics**. New York: Springer-Verlag, 1992.

NEWTON, I. **Opticks**: or, a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light. London: Sam. Smith and Benj. Walford, 1704.

OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

PINTO NETO, N. **Teoria da interpretação da mecânica quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

PIZA, A. F. R. T. **Sistemas quânticos compostos e emaranhamento, sistemas quânticos abertos e decoerência**. São Paulo: Instituto de Física da USP, 2009. Notas de aula.

POLCHINSKI, J. **String theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

RAFSANJANI, A. A. et al. Non-local temporal interference. **Scientific Reports**, London, v. 14, p. 1-16, 2024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-024-54018-8>. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/s41598-024-54018-8>. Acesso em: 24 out. 2024.

ROWE, M. A. et al. Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection. **Nature**, London, v. 409, n. 6822, p. 791-794, 2001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/35057215>. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/35057215>. Acesso em: 23 out. 2024.

SCHLOSSHAUER, M. **Decoherence and the quantum-to-classical transition**. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

SCHRÖDINGER, E. **Collected papers on wave mechanics**: together with his four lectures on wave mechanics. New York: Chelsea Publishing Company, 1982.

SIQUEIRA-BATISTA, R.; HELAYËL-NETO, J. A. A mecânica quântica de David Bohm. **Vértices**, Rio de Janeiro, v. 10, n. 3, p. 57-62, 2008. DOI: <https://doi.org/10.5935/1809-2667.20080005>. Disponível em: <https://editoraessentia.iff.edu.br/index.php/vertices/article/view/1809-2667.20080005>. Acesso em: 23 out. 2024.

SUN, Q.; ZUBAIRY, M. S. Entanglement criteria for continuous-variable systems. **Classical, Semi-Classical and Quantum Noise**, New York, p. 249-258, 2011. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-6624-7_17. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-6624-7_17. Acesso em: 23 out. 2024.

TZEMOS, A. C.; CONTOPOULOS, G. Critical points and trajectories of the Bohmian quantum flow. **Maple Transactions**, Toronto, v. 3, n. 2, 2023. Disponível em: <https://mapletransactions.org/index.php/maple/article/view/15546>. Acesso em: 24 out. 2024.

TZEMOS, A. C.; CONTOPOULOS, G. Chaos and ergodicity in an entangled two-qubit Bohmian system. **Physica Scripta**, Bristol, v. 95, n. 6, p. 1-19, 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.03989>. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2003.03989>. Acesso em: 24 out. 2024.

TZEMOS, A. C.; CONTOPOULOS, G. The role of chaotic and ordered trajectories in establishing Born's rule. **Physica Scripta**, Bristol, v. 96, n. 6, 2021. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2111.00846>. Acesso em: 24 out. 2024.

TZEMOS, A. C.; CONTOPOULOS, G.; EFTHYMIPOULOS, C. Bohmian trajectories in an entangled two-qubit system. **Physica Scripta**, Bristol, 2019. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.12619>. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1905.12619>. Acesso em: 24 out. 2024.

TZEMOS, A. C.; CONTOPOULOS, G.; EFTHYMIPOULOS, C. Origin of chaos in 3-D Bohmian trajectories. **Physics Letters A**, Amsterdam, 2016. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1609.07069>. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1609.07069>. Acesso em: 24 out. 2024.

WISNIACKI, D. A.; PUJALS, E. R. Motion of vortices implies chaos in Bohmian mechanics. **EPL (Europhysics Letters)**, Bristol, v. 71, n. 159, 2005. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0502108>. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0502108>. Acesso em: 24 out. 2024.

WOLFRAM. **Wolfram Demonstrations Project**: visualizações interativas para a área de desktop, 2023. Disponível em: <https://demonstrations.wolfram.com/>. Acesso em: 11 set. 2023.

YOUNG, T. I. The Bakerian lecture: experiments and calculations relative to physical optics. **Philosophical Transactions**, London, v. 94, p. 1-16, 1804. DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1804.0001>. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1804.0001>. Acesso em: 23 out. 2024.

Apêndice 1

A equação de Schrödinger 2D é dada por:

$$\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \left(x^2 + \frac{\gamma_x}{x^2} \right) + \left(y^2 + \frac{\gamma_y}{y^2} \right) \right] \Psi(x, y, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, y, t)$$

O objetivo é resolver essa equação usando o método de separação de variáveis. Propõe-se uma função de onda escrita como: $\Psi(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$. Substitui-se a função separada na equação de Schrödinger original:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \right) + \left(x^2 + \frac{\gamma_x}{x^2} \right) + \left(y^2 + \frac{\gamma_y}{y^2} \right) \right] X(x)Y(y)T(t) \\ & = i \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} X(x)Y(y) \end{aligned}$$

Agora, divide-se ambos os lados da equação pelo produto $X(x) Y(y) T(t)$, o que dá:

$$-\left(\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \right) + x^2 + \frac{\gamma_x}{x^2} + y^2 + \frac{\gamma_y}{y^2} = i \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt}$$

A parte temporal depende apenas de $T(t)$, portanto, pode-se separar o lado esquerdo (que depende de x e y) do lado direito (que depende apenas de t). Isso permite separar a equação temporal:

$$i \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = E \rightarrow \frac{dT(t)}{dt} = -iET(t)$$

Desse modo, resulta a solução $T(t) = e^{-iEt}$. Agora, concentra-se apenas na parte espacial da equação, que depende de x e y . A parte espacial da equação, reescrevendo a energia $E = E_x + E_y$:

$$-\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + x^2 + \frac{\gamma_x}{x^2} - E_x = +E_y + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - y^2 - \frac{\gamma_y}{y^2}$$

Como os termos que dependem de x e y são independentes, pode-se separar essa equação em duas equações independentes, uma para x e outra para y :

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{\gamma_x}{x^2} - E_x \right) X(x) = 0, \quad \left(-\frac{d^2}{dy^2} + y^2 + \frac{\gamma_y}{y^2} - E_y \right) Y(y) = 0$$

Pode-se comparar essas equações com a EDO (Abramowitz; Stegun, 1965)

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{4} x^2 + \frac{g}{2} x^{-2} - E \right] \psi = 0$$

cuja solução geral é dada por:

$$\psi_n(x) = x^{a+\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\omega x^2\right) L_n^{(a)}\left(\frac{1}{2}\omega x^2\right)$$

Sendo $L_n^{(a)}$ os polinômios generalizados de Laguerre, a uma constante dependente de g , definida como:

$$a_x = \frac{1}{2}(1 + 2g)^{1/2}$$

e os níveis de energia correspondentes dados por:

$$E_n = \omega(2n + a + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e obter:

$$X_n(x) = x^{a_x+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} L_n^{(a_x)}(x^2), \quad a_x = \frac{1}{2}(1 + 4\gamma_x)^{1/2}$$

$$Y_n(y) = y^{a_y+\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} L_n^{(a_y)}(y^2), \quad a_y = \frac{1}{2}(1 + 4\gamma_y)^{1/2}$$

$$E_n = E_{n_x} + E_{n_y}, \quad E_{n_x} = 2(2n_x + a_x + 1), \quad E_{n_y} = 2(2n_y + a_y + 1)$$

Sendo assim, escreve-se a energia como:

$$E_{n_x, n_y} = 4(n_x + n_y + 1) + 2(a_x + a_y)$$

e a função de onda como sendo:

$$\Psi_{n_x, n_y}(x, y, t) = \left(x^{a_x+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} L_{n_x}^{(a_x)}(x^2)\right) \cdot \left(y^{a_y+\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} L_{n_y}^{(a_y)}(y^2)\right) \cdot e^{-E_{n_x, n_y} \cdot t}$$

Apêndice 2

As velocidades calculadas utilizando o *Mathematica* foram:

$$v_x(x, y, t) = \frac{v_{xn}}{v_{xd}}, \quad v_y(x, y, t) = \frac{v_{yn}}{v_{yd}} \quad (A1)$$

Com os termos v_{xn} , v_{yn} e v_{xd} comum a ambos:

$$v_{xn} = 16x((10 - 4y^2) \sin(\delta) + (4 + a(5 - 2y^2)^2) \sin(4t + \delta) + 2a(5 - 2y^2) \sin(8t + \delta))$$

$$v_{yn} = 16y((4 + a(5 - 2x^2)^2) \sin(4t) + 2(-5 + 2x^2)(\sin(\delta) - a \sin(8t + \delta)))$$

$$v_{xd} = a^2(5 - 2x^2)^2(5 - 2y^2)^2 + 8(27 + 2x^2(-5 + x^2) + 2y^2(-5 + y^2)) + 4 \cos(4t) (-4 + a(5 - 2x^2)^2)(-5 + 2y^2) + 20 \cos(\delta) + 4(2(-5 + 2x^2)(-5 + 2y^2) \cos(\delta) + (-8x^2 - a(-5 + 2x^2)(5 - 2y^2)^2) \cos(4t + \delta) + 2a(-5 + 2x^2)(-5 + 2y^2) \cos(8t + \delta)) - 80 \sin(4t) \sin(\delta)$$