Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Sensibilidade a posteriori de um modelo de Captura-recaptura aplicado a estimação da frota de veículos

Posterior estimates sensibility of a capture-recapture model applied to vehicle fleet estimation

Sensibilidad a posteriori de un modelo de captura-recaptura aplicado a la estimación de flotas de vehículos

Danilo Kauã Santana da Silva [1]
Marcelo de Paula [2]
Marilia Conceição de Souza Cáceres [3]

Resumo: Este artigo tem como objetivo estimar o tamanho da frota de veículos automotores que frequentam os estacionamentos do *Campus* Sede da Universidade Federal do Oeste da Bahia. A hipótese é de que o tamanho da frota seja diferente para cada um dos três períodos de funcionamento da instituição. Adotamos um modelo bayesiano de captura-recaptura múltipla e monitoramos a sensibilidade *a posteriori* do tamanho da frota, considerando distribuições *a priori* informativas e não informativas. Os resultados bayesianos mostraram-se semelhantes às estimativas clássicas quando adotamos *prioris* não informativas e revelaram que a frota de veículos é maior para o período vespertino. Para carros obtivemos: $N = 348$, $N = 553$ e $N = 256$, e para motocicletas obtivemos $N = 180$, $N = 188$ e $N = 116$, nos períodos matutino, vespertino e noturno, respectivamente.
Palavras-chave: Estimativas. Modelo. Bayesiano. Frota. Veículos.

Abstract: This paper aims to estimate the motor vehicles fleet size that frequent the parking lots of the Headquarters Campus of the Federal University of Western Bahia. The hypothesis is that the fleet size is different for each of the three periods of the institution operation. We adopted a bayesian multiple capture-recapture model and we monitored the *posteriori* estimates sensibility of fleet size, considering informative and non-informative *priori* distributions. The bayesian results were similar to the classical estimates when we adopted non-informative *prioris*, and revealed that the vehicle fleet size is larger in the afternoon. For cars we obtained: $N = 348$, $N = 553$ and $N = 256$, and for motorcycles we obtained $N = 180$, $N = 188$ and $N = 116$, in the morning, afternoon and night periods, respectively.
Keywords: Estimates. Model. Bayesian. Fleet. Vehicles.

[1] Bacharelando em Engenharia Civil. Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB). ORCID: https://orcid.org/0009-0003-5438-9410. E-mail: danilo.s9128@ufob.edu.br.
[2] Professor Orientador. Doutor em Estatística (UFSCar). Docente da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB). ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0234-7270. E-mail: marcelop@ufob.edu.br.
[3] Doutora em Ciências (UCA-Espanha). Docente da Universidade Federal do Recôncavo Baiano (UFRB). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8453-4661. E-mail: mariliasouza@ufrb.edu.br.

Revista brasileira de iniciação científica

ISSN: 2359-232X

Resumen: Este artículo tiene como objetivo estimar el tamaño de la flota de vehículos automóviles que utilizan los aparcamientos del campus principal de la Universidade Federal do Oeste da Bahia. La hipótesis es que el tamaño de la flota es diferente para los tres períodos de operación de la institución. Adoptamos un modelo bayesiano de captura-recaptura múltiple y monitoreamos la sensibilidad *a posteriori* del tamaño de la flota, considerando distribuciones *a priori* informativas y no informativas. Los resultados bayesianos fueron similares a las estimaciones clásicas cuando adoptamos *prioris* no informativas y revelaron que la flota es mayor por la tarde. Para automóviles obtuvimos: $N = 348$, $N = 553$ y $N = 256$, y para motocicletas $N = 180$, $N = 188$ y $N = 116$ en los periodos mañana, tarde y noche, respectivamente.

Palabras-clave: Estimaciones. Modelo. Bayesiano. Flota. Vehículos.

Submetido 06/10/2023 **Aceito 26/03/2024** **Publicado 16/07/2024**

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Considerações iniciais

Há diversos métodos estatísticos consolidados que são utilizados na estimação do tamanho populacional (Bussab & Bolfarine, 2005). Dentre os principais métodos destacamos, neste artigo, o método da amostragem por captura-recaptura. Como exemplos de trabalhos realizados com este método podemos citar Castledine (1981), Smith (1991), Zacharias (2000), Basu & Ebrahimi (2001), Wang (2002), Paula (2006), Salasar et al. (2015) e Pezzott (2018). No âmbito histórico, tal técnica foi adotada por Laplace (1786) para estimar o tamanho da população Francesa. Na ecologia, o dinamarquês Carl G. J. Petersen (1896) foi o primeiro pesquisador a utilizar este método de amostragem para estudar o fluxo migratório de peixes no mar Báltico. Embora este método tenha surgido com aplicações em população de seres vivos, nas últimas décadas tem se destacado pela aplicação em populações diversas. Oliveira et al. (2004), por exemplo, realizou um estudo de estimação do tamanho da frota de veículos que estacionavam no centro do município de Lavras-MG.

Certamente, um motivo de grande importância para estimar o número de veículos automotores que frequentam os estacionamentos de uma instituição pública reside no fato de que isso impacta diretamente sua infraestrutura. De uma maneira simples, os planejamentos de expansão de um estacionamento, com base em demandas equivocadas, geram problemas de falta de vagas, caso a demanda seja subestimada, ou ainda podem gerar problemas de custo, caso a demanda seja superestimada. Além disso, consideramos que, para além dos possíveis planos de expansão da área de estacionamentos desta ou de qualquer outra instituição pública, os resultados desta pesquisa podem subsidiar a reflexão, elaboração e proposição de políticas públicas de incentivo à diminuição do lançamento de poluentes no ar, uma vez que os veículos automotores funcionam à base de combustível fóssil (poluente ao meio ambiente). Este estudo se revela convergente com quatro, dentre os dezessete objetivos de desenvolvimento sustentável propostos pela Organização das Nações Unidas (ONU / 2015). Os quatro objetivos contemplados neste estudo são: (i) Energia limpa e acessível; (ii) Cidades e comunidades sustentáveis; (iii) Consumo e produção responsáveis; (iv) Ação contra a mudança global do clima.

Neste contexto, apresentamos um estudo de estimação do tamanho da frota de veículos automotores, carros e motocicletas, frequentadores dos estacionamentos do *Campus* Sede “Reitor Edgard Santos” da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), por meio do método da amostragem por captura-recaptura múltipla. Adotamos a amostragem por captura-recaptura em vários estágios, também denominada de captura-recaptura múltipla, e assumimos população fechada durante o período estudado para carros e motocicletas, segundo cada um dos três períodos de funcionamento da instituição.

Metodologia

Enfatizamos a abordagem quantitativa do método adotado, pois utilizamos neste trabalho procedimentos sistemáticos para a descrição e explicação do estudo em questão e abordamos variáveis expressas sob a forma de dados numéricos. Trata-se de uma pesquisa estruturada, de natureza aplicada, com a utilização de métodos estatísticos para quantificar os dados e generalizar os resultados do processo de amostragem para toda a população-alvo.

No que tange aos procedimentos (meios), este trabalho se caracteriza como pesquisa de campo, pois o levantamento e coleta dos dados foram realizados no local onde ocorre o fenômeno estudado. Quanto aos objetivos, destacamos a característica exploratória da pesquisa no tocante à visão geral acerca do tema, pois há poucas pesquisas realizadas sobre a aplicação específica proposta pelos autores. Porém, também destacamos sua finalidade descritiva no que se refere ao arcabouço matemático e estatístico já conhecido em outras aplicações, o que permitiu que houvesse toda uma estrutura pré-planejada. Além disso, sob a perspectiva da temática da estimação de parâmetros, também apontamos sua finalidade analítica, já que, para este trabalho, generalizar significa estimar o tamanho da frota de veículos.

Dessa maneira, diante das especificações elencadas (Silva, 2004), atribuímos a esta pesquisa uma abordagem quantitativa de natureza aplicada cujo intuito descritivo-analítico é a estimação do tamanho da frota de veículos automotores (carros e motocicletas) de usuários dos estacionamentos da Universidade Federal do Oeste da Bahia, localizada no Município de Barreiras, Estado da Bahia. Todo o processo de obtenção dos dados ou amostras consistiu em pesquisa de campo, isto é, na observação dos veículos estacionados em dias e horários distintos ao longo dos primeiro e segundo semestres letivos de 2023. A primeira época de observação dos veículos (amostragem), durante o primeiro semestre, foi realizada em uma segunda-feira. A segunda foi realizada em uma terça-feira da semana seguinte. A terceira foi realizada em uma quarta-feira da semana seguinte e assim por diante até a quinta época de observação em uma sexta-feira, totalizando um período de cinco semanas. Para cada dia de observações, consideramos três horários fixados: 10h00 para o período matutino, 14h30 para o período vespertino e 20h00 para o período noturno.

O mesmo procedimento foi realizado durante o segundo semestre letivo de 2023, totalizando 10 épocas de observações dos veículos estacionados (dez amostragens). Neste contexto, cada veículo observado, independente do dia ou do período, teve sua placa anotada, ou seja, houve uma "marca" não literal, conforme o método de amostragem por captura-recaptura múltipla, que é detalhadamente explicado ao longo desta Seção.

Neste contexto, reforçamos que o caráter analítico desta pesquisa está na extrapolação dos resultados à população especificada, já que este conjunto de dez amostras, tanto para carros quanto para motocicletas, se constitui no conjunto de dados em que aplicamos os modelos estatísticos para estimar o tamanho desta população específica, que é o tamanho da frota de veículos automotores que frequentam os estacionamentos da Universidade Federal do Oeste da Bahia – UFOB.

Um breve histórico da origem do método de amostragem por captura-recaptura: Tal método se originou a partir de um estudo em Ecologia, concebido e realizado pelo pesquisador biólogo dinamarquês Carl G. J. Petersen (1896). Esse método é denominado e difundido como amostragem via captura-recaptura simples para estimar o tamanho de uma população. Tal amostragem consiste, primeiramente, na seleção de uma amostra aleatória sem reposição de tamanho n_1 da população. Em seguida, os indivíduos capturados recebem uma marca para uma posterior identificação e são devolvidos à população. Depois de um certo intervalo de tempo, uma segunda amostra aleatória de tamanho n_2 é selecionada sem reposição da população. Ao observar o número m de animais marcados na segunda amostra, foi possível obter uma estimativa $\widehat{N}$ para o tamanho N da população ao igualar as proporções entre o número de animais marcados na população antes da seleção da segunda amostra em relação ao tamanho total da população (n_1/N), com a proporção do número de animais marcados na segunda amostra em relação ao tamanho dessa segunda amostra (m/n_2). Dessa maneira, a partir da igualdade $(n_1 \,/\, N) = (m/n_2)$ obtém-se o estimador $\widehat{N}$ conhecido na literatura como estimador de Petersen (Seber, 1982), como mostra o quadro 01. Também é sabido que tal metodologia foi utilizada por Laplace em 1786 com o intuito de estimar o tamanho da população da França, e também por outros autores, como Frederick Lincoln (1930). Entretanto, o número m de animais marcados na segunda amostra pode assumir o valor zero e, neste contexto, o estimador de

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Petersen não se aplica por assumir valor infinito. Contudo, há outros estimadores que contornam esse problema no caso da captura-recaptura simples conforme mostramos comparativamente no quadro a seguir.

Quadro 1 – Estimadores clássicos aplicados ao método de captura-recaptura simples.

Estimador de Petersen (1896) $\hat{N} = \frac{n_1 n_2}{m}$	Variância proposta por Sekar & Deming (1949) $Var(\hat{N}) = \frac{n_1 n_2 (n_1 - m)(n_2 - m)}{m^3}$
Estimador de Chapman (1951) $\hat{N} = \frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{(m + 1)} - 1$	Variância proposta por Seber (1970) e Wittes (1968) $Var(\hat{N}) = \frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_1 - m)(n_2 - m)}{(m + 1)^2 (m + 2)}$
Estimador de Bailey (1951) $\hat{N} = \frac{n_1 (n_2 + 1)}{m + 1}$	Variância proposta por Seber (1970) $Var(\hat{N}) = \frac{{n_1}^2 (n_2 + 1)(n_2 - m)}{(m + 1)^2 (m + 2)}$

Fonte: Autoral (2023). Legenda: $\hat{N}$ é um estimador clássico do método de captura-recaptura simples; $Var(\hat{N})$ é variância do estimador; n_1 é o número de veículos distintos observados na primeira época de amostragem; n_2 é o número de veículos distintos observados na segunda época; m é o número de veículos distintos observados na segunda época que já haviam sido observados na primeira época (os recapturados).

O método de amostragem por captura-recaptura múltipla: É uma extensão do método de captura-recaptura simples de Petersen, proposta por Schnabel (1938) para uma série de S amostras ($S \geq 3$) cujos tamanhos são dados pelo vetor $(n_1, n_2, \dots, n_S)$. Neste caso, a estimativa de N é dada por:

$$\hat{N} = \frac{\sum_{j=2}^{S} n_j M_j}{\sum_{j=2}^{S} m_j}, \qquad (1)$$

em que:

j : é a *j-ésima* amostra, $j = 1,2, \dots, S$;

n_j : é o número de veículos distintos observados na *j-ésima* amostra, $j = 1,2, \dots, S$;

m_j : é o número de veículos distintos marcados na *j-ésima amostra*, $j = 1,2, \dots, S$;

M_j : é o número de veículos distintos observados e marcados na população de veículos (tamanho da frota) que se deseja estimar no instante anterior à *j-ésima* amostra, $j = 1,2, \dots, S$.

O quadro abaixo ilustra esquematicamente o problema do processo de estimação do tamanho populacional utilizando o método da amostragem por captura-recaptura múltipla.

Quadro 2 - Esquema de amostragem via captura-recaptura múltipla.

População Fechada	**Amostragem (Épocas de captura - observações)**				
	1	**2**	**3**	$\cdots$	**S**
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\cdots$	p_{1S}
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\cdots$	p_{2S}
3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\cdots$	p_{3S}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
N	p_{N1}	p_{N2}	p_{N3}	$\cdots$	p_{NS}

Fonte: Wang (2002), Paula (2006). Legenda: p_{ij} é a probabilidade do *i-ésimo* veículo $(i = 1,2,\cdots,N)$ ser observado na *j-ésima* época de observação, com $j = 1,2,\cdots,S$.

Contudo, não podemos cogitar o *"i-ésimo"* veículo uma vez que não conhecemos qual é o valor numérico do tamanho populacional *N,* visto que queremos estimá-lo. Constatamos, então, que se trata de um problema de estimar $NS + 1$ parâmetros. Por essa razão consideramos os seguintes casos particulares, com o intuito de facilitar a obtenção do modelo:

1º Caso: $p_{ij} = p_i$: A probabilidade de observação varia conforme o veículo, independentemente da época de captura, isto é, dado um veículo, ele tem a mesma probabilidade de ser observado em qualquer uma das épocas de captura.

2º Caso: $p_{ij} = p_j$: A probabilidade de observação varia conforme a época de captura, independentemente do veículo, isto é, dada uma época de captura, todos os veículos têm probabilidades iguais de serem capturados (Castledine, 1981). É o caso do estimador de Schnabel (1938) expresso em (1).

3º Caso: $p_{ij} = p$: É o caso mais simples do método de captura-recaptura múltipla. A probabilidade de captura é constante, isto é, a probabilidade de observação é a mesma para quaisquer veículos e para todas as épocas de captura.

Neste artigo, a concepção e o desenvolvimento do modelo estatístico e a obtenção da função de verossimilhança em que lhe será inserida os dados observados de acordo com o método de amostragem por captura-recaptura assumindo S estágios de marcação $(S \geq 3)$ são baseados em Castledine (1981).

Definimos neste estudo os seguintes termos:

N : é o parâmetro a ser estimado que denota o tamanho desconhecido da população;

S : é a quantidade de amostras sequenciadas extraídas da população (conhecidas na literatura como épocas de captura);

p_j : é a probabilidade de qualquer veículo ser observado na *j-ésima* amostra, isto é, na *j-ésima* época de captura, com $j = 1,2, \dots, S$;

$\boldsymbol{p}$: denota o vetor de probabilidades de observação (captura) dado por $(p_1, p_2, \dots, p_S)$;

n_j : é a quantidade de veículos observados na *j-ésima* amostra, $j = 1,2, \dots, S$;

m_j : é a quantidade de veículos marcados na *j-ésima* amostra, $j = 1,2, \dots, S$;

M_j : é a quantidade de veículos observados e marcados na população de veículos (tamanho da frota) a ser estimada no instante anterior à *j-ésima* amostra, $j = 1,2, \dots, S$.

Portanto, constatamos que o método de amostragem utilizando captura-recaptura é descrito detalhadamente no Quadro 3 (Ver Wang, 2002; Paula, 2006):

Quadro 3 - Esquema de amostragem via método de captura-recaptura múltipla considerando o 2º caso em que $p_{ij} = p_j$.

$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{n_j}$	$\boldsymbol{m_j}$	$\boldsymbol{M_j}$
1	n_1	$m_1 = 0$	$M_1 = 0$
2	n_2	m_2	$M_2 = M_1 + n_1 - m_1 = n_1$
3	n_3	m_3	$M_3 = M_2 + n_2 - m_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$j+1$	n_{j+1}	m_{j+1}	$M_{j+1} = M_j + n_j - m_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s	n_s	m_s	$M_s = M_{s-1} + n_{s-1} - m_{s-1}$

Fonte: Paula (2006). Legenda: S é o número de épocas de observações dos veículos; n_j é o número de veículos distintos observados na *j-ésima* amostra; m_j é o número de veículos marcados na *j-ésima* amostra; M_j é o número de veículos observados e marcados na população de veículos (tamanho da frota) que se deseja estimar no instante anterior à *j-ésima* amostra, com $j = 1,2, \dots, S$.

Transpondo o conteúdo metodológico exposto até aqui para o contexto de veículos automotores, consideremos que as seguintes condições são verificadas:

a) a população é fechada, isto é, não há alteração no tamanho N durante o período de estudo, que abrange todas as épocas de observação das placas dos veículos (captura);

b) o número de veículos observados marcados (anotadas as placas) na primeira amostra ou primeira época de observação é zero, ou seja, $m_1 = 0$;

c) há inicialmente $M_1 = 0$ veículos marcados na população;

d) em uma dada época de observação (captura), qualquer veículo tem a mesma probabilidade de ser capturado (observado), desconsiderando o seu histórico de captura (se ele já foi capturado anteriormente). Esse é o caso particular em que $p_{ij} = p_j$ com $j = 1,2,\ldots,S$. Em outros termos, em uma determinada época de observação, todos os veículos têm chances iguais de serem observados (Castledine, 1981; Paula, 2006);

e) os veículos são independentes entre si;

f) as marcas são as placas dos veículos e não afetam a sua capturabilidade (observação);

g) os veículos mantêm suas placas intactas durante o período entre as amostras;

h) todas as placas observadas a partir da segunda amostra são anotadas novamente;

i) há independência entre as observações dos veículos em uma dada amostragem;

j) consideramos que as épocas de amostragem são independentes;

Respeitadas todas as condições acima (ver Castledine, 1981; Zacharias, 2000; Wang, 2002; Paula, 2006), a função de verossimilhança é tal que:

$$L(N, \boldsymbol{p} \mid D) = P(n_1, m_1; n_2, m_2; \ldots; n_S, m_S \mid \boldsymbol{p}, N) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^{S} {p_j}^{n_j} \left(1 - p_j\right)^{N - n_j}, \qquad (2)$$

em que a estatística

$$r = \sum_{j=1}^{S} n_j - \sum_{j=1}^{S} m_j \qquad (3)$$

é o número de veículos distintos observados, com $N \geq r$, $0 \leq p_j \leq 1$, $j = 1,2,\ldots,S$. Para o caso particular em que $p_j = p$, para $j = 1,2,\ldots,S$, então a função de verossimilhança é expressa por

$$L(N, \boldsymbol{p} \mid D) \propto \binom{N}{r} p^{\sum_{j=1}^{S} n_j} (1-p)^{NS - \sum_{j=1}^{S} n_j}.$$

As estimativas de máxima verossimilhança $\widehat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_S)$ são tais que:

$$\hat{p}_j = \frac{n_j}{\widehat{N}}, \quad \text{com} \quad j = 1,2, \dots, S.$$

Por sua vez, a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro N, expressa por $\widehat{N}$, é aproximadamente a solução da equação (Wang (2002), Paula (2006)):

$$1 - \frac{r}{N} = \prod_{J=1}^{S} (1 - p_j), \quad N \geq r + 1.$$

Obtenção de um modelo estatístico bayesiano de amostragem por captura-recaptura múltipla assumindo uma distribuição *a priori* não informativa para o tamanho populacional N: Para este modelo assumimos a distribuição *a priori* Beta para as probabilidades de observação, cujo suporte da distribuição está no intervalo [0 ; 1]. A adoção da distribuição Beta se deu por possibilitar, ao alterar seus parâmetros alfa e beta, que tal *priori* seja desde não-informativa (por exemplo $p = 0{,}5$ com variância pequena, que nada mais é que o caso particular do modelo uniforme contínua) até informativa (por exemplo os casos extremos $p = 0{,}001$ ou $p = 0{,}999$ com variância grande). Estes diferentes cenários foram testados e discutidos na Seção de Resultados e Discussão. Neste contexto, a distribuição *a priori* para a probabilidade de observação associada a *j-ésima* época de amostragem, com $j = 1,2, \dots, S$, é expressa por:

$$\pi(p_j) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} {p_j}^{\alpha - 1} (1 - p_j)^{\beta - 1}, \tag{4}$$

em que

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},$$

e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama, $0 < p_j < 1$, $j = 1,2, \dots, S$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, com

$$E(p_j) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \qquad \text{e} \qquad Var(p_j) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}.$$

Para o caso do tamanho populacional N adotamos uma distribuição *a priori* não informativa de Jeffreys (ver Smith (1991), George and Robert (1992), Basu e Ebrahimi (2001)), isto é,

$$\pi(N) = N^{-1} \tag{5}$$

Dessa maneira, a partir da função dos dados (verossimilhança) expressa em (2), da distribuição *a priori* Beta adotada para as probabilidades de observação expressa em (4), da distribuição *a priori* não informativa de Jeffreys adotada para o tamanho populacional expressa em (5), obtemos o seguinte modelo bayesiano expresso pela distribuição *a posteriori* dos parâmetros conjuntos N, que denota o tamanho da frota de veículos, e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots p_S)$ que denota as probabilidades de observação:

$$\pi(\mathbf{p}, N|D) \propto \prod_{j=1}^{S} {p_j}^{n_j+\alpha-1}\left(1-p_j\right)^{N-n_j+\beta-1}, \quad j = 1,2,\dots,S. \tag{6}$$

Neste cenário, assumindo a distribuição *a posteriori* dos parâmetros conjuntos N e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots p_S)$ expressa em (6), obtemos as seguintes distribuições condicionais necessárias para o amostrador de Gibbs (ver Zacharias (2000), Wang (2002) e Paula (2006)):

$$(N-r)|p, D \sim BN\left[r\,, 1-\prod_{j=1}^{S}\left(1-p_j\right)\right].$$

$$\pi(\mathbf{p}|N, D) \propto \prod_{j=1}^{S} {p_j}^{n_j}\left(1-p_j\right)^{N-n_j}, \quad j = 1,2,\dots,S.$$

Neste trabalho, consideramos $S = 10$ épocas de amostragens durante 5 semanas do primeiro semestre e 5 semanas do segundo semestre letivo de 2023. A primeira época de observação (amostragem), durante o primeiro semestre, foi realizada em uma segunda-feira. A segunda, em uma terça-feira da semana seguinte. A terceira, em uma quarta-feira da semana seguinte e assim por diante, até a quinta época de observação em uma sexta-feira. Para cada dia de observações, consideramos 3 horários fixos: 10h00, 14h30 e 20h00 para os períodos matutino, vespertino e noturno, respectivamente. O mesmo procedimento foi realizado no segundo semestre letivo, totalizando $S = 10$ épocas de amostragens.

Obtenção de um modelo estatístico bayesiano de amostragem por captura-recaptura múltipla assumindo uma distribuição *a priori* informativa para o tamanho populacional N: Para este modelo mantivemos a *priori* Beta para as probabilidades de observação cujo suporte da distribuição está no intervalo [0 ; 1], conforme modelo anterior. Para o caso do tamanho populacional N adotamos uma distribuição *a priori* informativa de Poisson truncada em zero com parâmetro λ $(\lambda > 0)$, ou seja

$$\pi(N) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!\,(1-e^{-\lambda})}, \tag{7}$$

Com $N = 1,2,3,\dots$ A razão da escolha de tal *priori* é possibilitar o uso de uma informação prévia sobre o tamanho da frota de veículos que utilizam os estacionamentos da instituição. Como o número de veículos pertencentes à frota são números naturais diferentes de zero, temos que a distribuição de Poisson truncada em zero é adequada para ser uma distribuição *a priori* para o tamanho populacional, uma vez que assume os valores de contagem 1,2,3,... Então, a partir da função dos dados (verossimilhança) expressa em (2), da distribuição *a priori* Beta para as probabilidades de observação (captura) expressa em (4) e da distribuição *a priori* informativa de Poisson para N dada em (7), temos que a distribuição *a posteriori* conjunta de N e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots p_S)$ é tal que

$$\pi(\mathbf{p}, N|D) \propto \frac{\lambda^{N}}{(N-r)!}\prod_{j=1}^{S} {p_j}^{n_j+\alpha-1}\left(1-p_j\right)^{N-n_j+\beta-1}, \tag{8}$$

Com $0 < p_j < 1$, com $j = 1,2,\dots,S$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $N \geq r$. A partir da distribuição expressa em (8) em que temos a distribuição *a posteriori* dos parâmetros conjuntos N, que denota o tamanho da frota de veículos, e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots p_S)$, que denota as probabilidades de observação, obtemos as seguintes distribuições condicionais necessárias para o amostrador de Gibbs

$$N - r|\mathbf{p}, D \sim Poisson\left(\lambda\prod_{j=1}^{S}\left(1-p_j\right)\right).$$

$$\pi(\mathbf{p}|N, D) \propto \prod_{j=1}^{S} {p_j}^{n_j+\alpha-1}\left(1-p_j\right)^{N-n_j+\beta-1}, \quad j = 1,2,\dots,S.$$

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Todos os modelos bayesianos deste trabalho foram implementados utilizando-se o software R Core Team (2021), cuja convergência das cadeias geradas foi diagnosticada pelo critério de Gelman-Rubin (1992) baseado na análise de variância, comparando-a intra e entre as cadeias geradas.

Análise dos dados e resultados

Apresentamos nesta Seção os resultados obtidos neste trabalho no que tange à obtenção dos dados amostrais de veículos referentes ao ano letivo de 2023, bem como as estimativas clássicas e bayesianas obtidas por meio da amostragem via método de captura-recaptura múltipla aplicado às observações dos veículos automotores, cujas marcas são as suas placas. A Tabela 1 apresenta a quantidade de veículos observados nos estacionamentos da UFOB para cada época de observação (época de captura ou amostragem).

Tabela 1 – Quantidade de veículos observados nos estacionamentos da UFOB para cada amostragem ou épocas de observação (captura).

Carros (Matutino)				**(Carros Vespertino)**				**(Carros Noturno)**			
j	n_j	m_j	M_j	j	n_j	m_j	M_j	j	n_j	m_j	M_j
1	72	0	0	1	183	0	0	1	57	0	0
2	132	27	72	2	154	77	183	2	64	23	57
3	149	70	177	3	165	69	260	3	71	31	98
4	135	90	256	4	144	52	356	4	63	32	138
5	128	115	301	5	160	136	448	5	64	43	169
6	146	137	314	6	166	144	472	6	58	42	190
7	142	135	323	7	158	141	494	7	76	59	206
8	131	125	330	8	160	147	511	8	78	65	223
9	127	122	336	9	151	143	524	9	59	53	236
10	138	134	341	10	174	170	532	10	67	66	242
Motocicletas (Matutino)				**Motocicletas (Vespertino)**				**Motocicletas (Noturno)**			
j	n_j	m_j	M_j	j	n_j	m_j	M_j	j	n_j	m_j	M_j
1	16	0	0	1	46	0	0	1	29	0	0

2	47	9	16	2	59	21	46	2	25	11	29
3	71	39	54	3	68	34	84	3	33	19	43
4	50	13	86	4	63	41	118	4	27	8	57
5	49	33	123	5	61	43	140	5	30	22	76
6	53	44	139	6	67	58	158	6	35	25	84
7	52	44	148	7	76	68	167	7	31	24	94
8	62	54	156	8	56	51	175	8	40	33	101
9	63	57	164	9	77	73	180	9	23	21	108
10	48	44	170	10	71	70	184	10	34	33	110

Fonte: Dados obtidos pelos autores (2023). Legenda: j é a *j-ésima* época de observação; n_j é o número de veículos distintos observados na *j-ésima* amostra; m_j é o número de veículos distintos marcados na *j-ésima* amostra; M_j é a quantidade de veículos distintos observados e marcados na população de veículos (tamanho da frota) anterior à *j-ésima* amostra, $j = 1,2,\dots,10$.

No que tange os dados amostrais obtidos nesta pesquisa e apresentados na Tabela 1, cabe explanar que o termo "amostragem ou épocas de observação (época de captura)" refere-se à totalidade de veículos estacionados em um determinado período, e não a uma amostra dos veículos estacionados. Os tamanhos das amostras não são previamente determinados, pois trata-se do número de veículos distintos, estacionados e observados em um determinado período. Cada veículo tem sua placa anotada (marca da captura) e poderá ser observado novamente em outra época (recaptura).

Podemos notar que, tanto para carros como para motocicletas, o período vespertino apresentou um maior número de veículos estacionados em todas as 10 épocas de observação, seguido pelo período matutino. Por outro lado, o período noturno apresentou um menor número de veículos estacionados em todas as 10 épocas de observação.

Apresentamos na Tabela 2, a partir dos dados amostrais explanados na Tabela 1, as estimativas clássicas e bayesianas para o tamanho populacional N, tanto para carros como para motocicletas, considerando cada um dos três períodos de funcionamento da instituição.

No que tange às estimativas bayesianas, consideramos o modelo com distribuições *a priori* não informativas Beta com hiperparâmetros $\alpha = \beta = 0{,}5$ para as probabilidades de observação (captura) para as 10 épocas de amostragem e uma distribuição *a priori* não informativa de Jeffreys $\pi(N) = N^{-1}$ para o tamanho populacional N.

Implementamos os algoritmos de amostrador de Gibbs via *Monte Carlo Markov Chain* (MCMC) por meio de rotinas computacionais no Software R Core Team (2021), em que a convergência dos parâmetros foi monitorada pelo pacote computacional CODA (*Convergence Diagnostics and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output*, ver Best *et al*. 1995).

Para a obtenção de todas as estimativas bayesianas deste trabalho, foram geradas duas cadeias de 450000 iterações, em que descartamos as primeiras 50000 iterações, denominadas de "*burn-in*", e fixamos um salto de tamanho 20, o que resulta numa amostra final de tamanho 20000 da distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros N e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_{10})$.

Tabela 2 – Estimativas clássicas e estimativas bayesianas com *prioris* não-informativas para o tamanho N da frota de veículos automotores considerando cada período.

Carros	**Estimativas Clássicas**				**Estimativas Bayesianas**	
Período	Estatística r	Estimativa Schnabel	E.M.V	Moda	Média *a Posteriori*	Int. Cred. (95%)
Matutino	345	349	348	348	348	[345 ; 352]
Vespertino	536	560	554	553	553	[545 ; 563]
Noturno	243	252	256	255	256	[249 ; 265]
Motocicletas	**Estimativas Clássicas**				**Estimativas Bayesianas**	
Período	Estatística r	Estimativa Schnabel	E.M.V	Moda	Média *a Posteriori*	Int. Cred. (95%)
Matutino	174	173	180	180	180	[175 ; 186]
Vespertino	185	184	188	188	188	[185 ; 192]
Noturno	111	113	116	116	116	[112 ; 122]

Fonte: Resultados obtidos pelos autores (2023). Legenda: a estatística r é o número de veículos distintos observados durante as 10 épocas de observação (captura) durante o ano letivo de 2023; E.M.V é a estimativa da máxima verossimilhança; Int. Cred.(95%) é o intervalo de credibilidade referente ao modelo bayesiano adotado.

À luz dos resultados apresentados na Tabela 2, notamos que as estimativas bayesianas obtidas (médias *a posteriori*) se mostraram numericamente próximas às estimativas de máxima verossimilhança (E.M.V), às estimativas de Schnabel e às modas. Esta aproximação numérica entre as estimativas clássicas e bayesianas é esperada quando adotamos distribuições *a priori* não-informativas no modelo bayesiano. Nas Tabelas 3 e 4, apresentamos um estudo sobre a sensibilidade das estimativas *a posteriori* do tamanho populacional N da frota de carros e motocicletas, respectivamente, em relação à escolha dos hiperparâmetros α e β da distribuição *a priori* das probabilidades de captura p_j, para $j = 1,2,\dots,10$. Os valores numéricos dos hiperparâmetros foram escolhidos de tal forma que obtivéssemos diferentes médias *a priori* para p_j e verificássemos os impactos nos resultados *a posteriori* do parâmetro N, ou seja, nas estimativas da frota de veículos.

Tabela 3 – Estimativas *a posteriori* do tamanho da frota de **carros** considerando diferentes valores dos hiperparâmetros das distribuições *a priori* Beta.

Hiper-parâmetros		**Esperança *a priori***	**Matutino**		**Vespertino**		**Noturno**	
α	β	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$E(N\|D)$	Inter. Cred. (95%)	$E(N\|D)$	Inter. Cred. (95%)	$E(N\|D)$	Inter. Cred. (95%)
1	999	0,001	601	[555 , 650]	910	[853 , 972]	758	[665 , 861]
1	99	0,01	357	[350 , 365]	572	[559 , 586]	286	[271 , 303]
1	19	0,05	349	[346 , 354]	556	[546 , 566]	260	[251 , 270]
1	9	0,10	349	[345 , 353]	555	[545 , 563]	258	[250 , 267]
1	4	0,20	348	[345 , 352]	554	[545 , 563]	256	[249 , 265]
1	7/3	0,30	348	[345 , 352]	554	[545 , 563]	256	[249 , 265]
1	3/2	0,40	348	[345 , 352]	553	[545 , 563]	256	[249 , 265]
1	1	0,50	348	[345 , 352]	553	[545 , 563]	256	[249 , 264]
1/2	1/2	0,50	348	[345 , 352]	553	[545 , 563]	256	[249 , 265]
3/2	1	0,60	348	[345 , 352]	553	[545 , 562]	255	[248 , 264]
7/3	1	0,70	348	[345 , 352]	553	[545 , 562]	255	[248 , 263]
4	1	0,80	348	[345 , 352]	552	[544 , 561]	254	[247 , 262]
9	1	0,90	347	[345 , 451]	551	[543 , 559]	252	[246 , 259]
19	1	0,05	347	[345 , 350]	548	[541 , 556]	249	[244 , 254]
99	1	0,99	345	[345 , 346]	539	[536 , 543]	243	[243 , 245]
999	1	0,999	345	[345 , 345]	536	[536 , 473]	243	[243 , 243]

Fonte: Resultados obtidos pelos autores (2023).

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Os resultados apresentados na Tabela 3 mostram que a sensibilidade *a posteriori* para o tamanho da frota de carros diminui à medida que a esperança *a priori* das distribuições Betas se aproximam de 0,50. Em outras palavras, as estimativas *a posteriori* se aproximam das estimativas clássicas à medida que as distribuições *a priori* se tornam não informativas. Por outro lado, à medida que aumentamos a informação das distribuições *a priori* Beta (vide os casos extremos em que a esperança *a priori* se aproximam das fronteiras 0 ou 1), maior é o impacto nas estimativas bayesianas *a posteriori* para o tamanho N da frota de carros.

Tabela 4 – Estimativas *a posteriori* do tamanho da frota de **motocicletas** considerando diferentes valores dos hiperparâmetros das distribuições *a priori* Beta.

Hiper-parâmetros		**Esperança *a priori***	**Matutino**		**Vespertino**		**Noturno**	
α	β	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$E(N\|D)$	Inter. Cred. (95%)	$E(N\|D)$	Inter. Cred. (95%)	$E(N\|D)$	Inter. Cred. (95%)
1	999	0,001	626	[535 , 728]	521	[454 , 595]	621	[500 , 761]
1	99	0,01	205	[193 , 220]	203	[194 , 213]	149	[134 , 168]
1	19	0,05	183	[177 , 190]	189	[186 , 194]	120	[114 , 128]
1	9	0,10	181	[176 , 190]	188	[185 , 193]	118	[113 , 124]
1	4	0,20	180	[176 , 188]	188	[185 , 192]	117	[112 , 123]
1	7/3	0,30	180	[176 , 186]	188	[185 , 192]	116	[112 , 122]
1	3/2	0,40	180	[175 , 186]	188	[185 , 192]	116	[112 , 122]
1	1	0,50	180	[175 , 186]	188	[185 , 191]	116	[112 , 122]
1/2	1/2	0,50	180	[175 , 186]	188	[185 , 192]	116	[112 , 122]
3/2	1	0,60	180	[175 , 185]	188	[185 , 191]	116	[112 , 121]
7/3	1	0,70	179	[175 , 185]	187	[185 , 191]	115	[112 , 121]
4	1	0,80	179	[175 , 184]	187	[185 , 191]	115	[111 , 119]
9	1	0,90	178	[174 , 182]	187	[185 , 190]	113	[111 , 117]
19	1	0,05	176	[174 , 179]	186	[185 , 188]	112	[111 , 114]
99	1	0,99	174	[174 , 175]	185	[185 , 186]	111	[111 , 111]
999	1	0,999	174	[174 , 174]	185	[185 , 185]	111	[111 , 111]

Fonte: Resultados obtidos pelos autores (2023).

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Assim como ocorreu no caso dos carros na Tabela 3, observamos na Tabela 4 que a sensibilidade *a posteriori* para o tamanho da frota de motocicletas diminui à medida que a esperança *a priori* das distribuições Betas se aproxima de 0,50. As estimativas *a posteriori*, portanto, se aproximam das estimativas clássicas à medida que as *prioris* se tornam não informativas. Em contrapartida, à medida que aumentamos a informação das distribuições *a priori* Beta, maior é o impacto nas estimativas bayesianas *a posteriori* do tamanho N da frota de motocicletas. Nas Tabelas 5 e 6, apresentamos os resultados obtidos, considerando uma *priori* informativa de Poisson truncada em zero com parâmetro λ para o tamanho populacional N e um produto de distribuições *a priori* não informativas Beta para as probabilidades de observação associadas às épocas de amostragens, ou seja, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{10})$, a fim de monitorar o comportamento das estimativas *a posteriori* do tamanho populacional.

Tabela 5 – Estimativas *a posteriori* do tamanho da frota de **carros** considerando diferentes valores para o parâmetro lambda da distribuição *a priori* de Poisson.

Parâmetro $\boldsymbol{\lambda}$	**Matutino**		**Vespertino**		**Noturno**	
	$E(N\|D)$	Int. Cred.(95%)	$E(N\|D)$	Int.Cred.(95%)	$E(N\|D)$	Int.Cred.(95%)
50	345	[345 , 347]	537	[536 , 540]	245	[243 , 249]
100	346	[345 , 348]	539	[536 , 543]	247	[244 , 252]
150	346	[345 , 349]	540	[537 , 545]	250	[245 , 256]
200	347	[345 , 350]	542	[538 , 547]	253	[247 , 260]
250	347	[345 , 351]	543	[538 , 549]	256	[249 , 264]
300	348	[345 , 351]	545	[539 , 551]	259	[251 , 268]
350	348	[345 , 352]	546	[540 , 554]	262	[253 , 273]
400	349	[345 , 353]	548	[542 , 556]	266	[256 , 278]
450	349	[346 , 354]	550	[543 , 558]	270	[259 , 284]
500	350	[346 , 354]	551	[544 , 560]	275	[262 , 290]
550	350	[346 , 355]	553	[545 , 562]	281	[266 , 297]
600	351	[346 , 356]	555	[546 , 565]	287	[271 , 306]
650	351	[347 , 357]	557	[548 , 567]	294	[276 , 315]

700	352	[347 , 358]	559	[549 , 570]	303	[282 , 327]
750	352	[347 , 358]	561	[551 , 572]	313	[289 , 341]
800	353	[348 , 359]	563	[552 , 575]	326	[299 , 359]
850	353	[348 , 360]	565	[554 , 578]	343	[310 , 381]
900	354	[348 , 361]	567	[556 , 580]	365	[326 , 410]
950	354	[349 , 362]	570	[557 , 583]	395	[349 , 449]
1000	355	[349 , 362]	572	[559 , 586]	435	[379 , 497]

Fonte: Resultados obtidos pelos autores (2023).

Na Tabela 5, notamos que a informação *a priori* do hiperparâmetro λ predomina a informação dos dados sobre o parâmetro N à medida que se afasta da estatística r, tanto para mais quanto para menos. Da mesma forma, à medida que o hiperparâmetro λ se aproxima da estatística r, as estimativas *a posteriori* da frota de carros se aproximam das estimativas clássicas. Esse fato sugere que, ao assumirmos uma distribuição *a priori* informativa de Poisson para o parâmetro N, isto é, para o tamanho populacional, é necessário ter uma boa ideia do valor numérico do parâmetro λ, a fim de que as estimativas *a posteriori* de N não sejam significativamente comprometidas.

Tabela 6 – Estimativas *a posteriori* do tamanho da frota de **motocicletas** considerando diferentes valores para o parâmetro lambda da distribuição *a priori* de Poisson.

Parâmetro λ	**Matutino**		**Vespertino**		**Noturno**	
	$E(N\|D)$	Int.Cred.(95%)	$E(N\|D)$	Int.Cred.(95%)	$E(N\|D)$	Int.Cred.(95%)
25	175	[174 , 177]	185	[185 , 187]	112	[111 , 114]
50	175	[174 , 178]	186	[185 , 188]	113	[111 , 116]
75	176	[174 , 180]	186	[185 , 188]	114	[111 , 118]
100	177	[174 , 181]	186	[185 , 189]	115	[112 , 120]
125	178	[175 , 182]	187	[185 , 190]	117	[112 , 122]
150	179	[175 , 184]	187	[185 , 191]	118	[113 , 125]
175	180	[175 , 185]	188	[185 , 191]	120	[114 , 127]
200	181	[176 , 187]	188	[185 , 192]	121	[115 , 130]

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

225	182	[176 , 188]	188	[185 ,192]	123	[116 , 133]
250	183	[177 , 190]	189	[185 , 193]	126	[117 , 136]
275	184	[178 , 192]	189	[186 , 194]	128	[119 , 140]
300	185	[179 , 193]	190	[186 , 195]	131	[120 , 145]
325	186	[179 , 195]	190	[186 , 195]	135	[123 , 150]
350	188	[180 , 197]	190	[186 ,196]	139	[125 , 157]
375	189	[181 , 199]	191	[186 , 197]	144	[128 , 165]
400	191	[182 , 201]	191	[187 , 197]	151	[132 , 175]
425	192	[183 , 204]	192	[187 , 198]	160	[137 , 190]
450	194	[184 , 206]	192	[187 , 199]	173	[145 , 209]
475	196	[185 , 209]	193	[188 , 200]	191	[155 , 235]
500	198	[187 , 212]	193	[188 , 201]	216	[172 , 264]

Fonte: Resultados obtidos pelos autores (2023).

No que tange os resultados apresentados na Tabela 6, acerca das motocicletas, podemos constatar as mesmas consequências apresentadas na Tabela 5 no caso dos carros. A informação *a priori* do hiperparâmetro λ predomina a informação dos dados sobre o parâmetro N à medida que se afasta da estatística r para mais ou para menos. Analogamente, à medida que o hiperparâmetro λ se aproxima da estatística r, as estimativas *a posteriori* da frota de veículos se aproximam das estimativas clássicas.

Destacamos, novamente, a extrema importância de termos uma boa ideia do parâmetro λ quando adotamos uma distribuição *a priori* informativa de Poisson para o tamanho populacional, a fim de que as estimativas *a posteriori* de N não sejam significativamente comprometidas.

Em inferência bayesiana, o significado prático da utilização de distribuições *a priori* informativas é que a sua utilização representa o conhecimento prévio do pesquisador ou do profissional especialista da área, antes de se observar os dados, ou seja, antes de se obter a(s) amostra(s). Tal informação prévia é uma característica distintiva e fundamental na análise bayesiana, já que na inferência clássica as estimativas são obtidas somente a partir da informação oriunda dos dados observados ou da função de verossimilhança. Neste sentido, a fim de realizar uma análise bayesiana, é necessário especificar distribuições *a priori* para os parâmetros desconhecidos. A determinação de tais distribuições é sempre subjetiva quando adotadas com base em fundamentos teóricos, ou é empírica quando são utilizados dados experimentais nesta etapa (dados históricos).

A distribuição *a priori* tem importância maior quando o tamanho da amostra é pequeno. Caso contrário, a informação da *priori* tende a ser diluída pelos dados, ou seja, perde peso à medida em que a amostra aumenta e é dominada pela função de verossimilhança e, neste cenário, as abordagens clássica e bayesiana são numericamente coincidentes. Se a informação *a priori* sobre os parâmetros do estudo não está disponível ou, quando nunca houve um estudo específico no local do experimento, como é o caso deste estudo de estimação da frota de veículos usuários dos estacionamentos da UFOB, então a incerteza inicial sobre os parâmetros pode ser quantificada com distribuições a *priori* não-informativas.

Uma vez que não havia nenhum estudo ou informação prévia sobre o tamanho da frota de veículos que utilizam os estacionamentos da UFOB, os autores apresentaram os resultados bayesianos a partir de distribuições *a posteriori*, considerando *prioris* não-informativas e, num segundo momento, apresentaram possíveis cenários considerando *prioris* informativas.

O presente estudo poderá servir de base para estudos futuros, no que tange ao uso das estimativas obtidas neste estudo como possíveis valores norteadores para os parâmetros das *prioris* informativas.

Considerações finais

Este estudo teve como objetivo estimar o tamanho da frota de veículos automotores, carros e motocicletas, que frequentam os estacionamentos do *Campus* Sede da Universidade Federal do Oeste da Bahia, no município de Barreiras, Estado da Bahia. A hipótese inicial sobre a diferença no tamanho da frota para cada um dos três períodos de funcionamento da instituição foi constatada.

Alcançamos de maneira consistente, portanto, o objetivo proposto de estudar a sensibilidade das estimativas *a posteriori* do tamanho da frota de veículos, por meio de um modelo de captura-recaptura múltipla, analisando os impactos nas estimativas *a posteriori*, comparando com os resultados clássicos para carros e motocicletas segundo cada um dos três períodos de funcionamento da instituição: matutino, vespertino e noturno.

A partir dos resultados obtidos neste trabalho, as estimativas bayesianas *a posteriori*, referentes à frota de carros, considerando distribuições *a priori* não informativas, mostraram-se numericamente semelhantes às estimativas clássicas: $N = 348$, $N = 553$ e $N = 256$ para os períodos matutino, vespertino e noturno, respectivamente. O mesmo ocorreu com as estimativas bayesianas *a posteriori* da frota de motocicletas ao considerar distribuições *a priori* não informativas, ou seja, mostraram-se numericamente semelhantes às estimativas clássicas: $N = 180$, $N = 188$ e $N = 116$ para os períodos matutino, vespertino e noturno, respectivamente.

Com relação à sensibilidade *a posteriori* para o tamanho N da frota de carros e motocicletas, quando a esperança *a priori* das distribuições Betas se aproxima de 0,50, tornando-se não informativa, as estimativas *a posteriori* aproximam-se das estimativas clássicas. Em contrapartida, à medida que aumentamos a informação das distribuições *a priori* Beta (Vide casos extremos em que a esperança *a priori* se aproximam das fronteiras 0 ou 1), maior é o impacto nas estimativas bayesianas *a posteriori* de N para as frotas de carros e motocicletas.

No que tange o modelo bayesiano com distribuição informativa de Poisson truncada em zero, a informação *a priori* do hiperparâmetro λ predomina a informação dos dados sobre o parâmetro N à medida que se afasta da estatística r para mais ou para menos, em que r é o número de veículos distintos observados durante todo o período das 10 épocas de amostragem (ou observação).

Da mesma maneira, à medida que o parâmetro λ se aproxima da estatística r, as estimativas *a posteriori* da frota de carros se aproximam das estimativas clássicas. Tais resultados mostram que quando adotamos uma distribuição *a priori* informativa de Poisson para o tamanho populacional, devemos ter uma boa ideia do parâmetro λ, a fim de que as estimativas *a posteriori* de N não sejam significativamente comprometidas.

Referências

BAILEY, N. T. J. On estimating the size of mobile populations from recapture data. **Biometrika**, Oxford, v. 38, p. 293-306, 1951.

BASU, S.; EBRAHIMI, N. Bayesian capture-recapture methods for error detection and estimation of population size heterogeneity and dependence. **Biometrika**, Oxford, v. 88, n. 1, p. 269–279, 2001.

BEST, N.; COWLES, M. K.; VINES, K. CODA - Convergence Diagnosis and Out-put Analysis Software for Gibbs Sampling Output. **Biostatistics**, Unit MRC, Cambridge, Inglaterra, 1996.

BUSSAB, W.; BOLFARINE, H. **Elementos de amostragem**. São Paulo: Edgar Blucher, 2005.

CASTLEDINE, B. A. Bayesian analysis of multiple-recapture sampling for a closed population. **Biometrika**, Oxford, v. 68, n. 1, p. 197-210, 1981.

CHAPMAN, D. G. Some properties of the hypergeometric distribution with applications to zoological sample censuses. **Publications in Statistics**, University of California, v. 1, n. 7, p. 131-60, 1951.

CHAPMAN, D. G. The estimation of biological populations. **The Annals of Mathematical Statistics**, Ann Arbor, Michigan, v. 25, n. 1, p. 1-15, 1954.

GELMAN, A.; RUBIN, D. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statistical Science**, Ann Arbor, Michigan, v. 7, n. 4, p. 457-511, 1992.

GEORGE, E. I.; ROBERT, C. P. Capture-recapture estimation via Gibbs sampling. **Biometrika**, Oxford, v. 79, n. 4, p. 677-683, 1992.

HASTINGS, W. K. Monte Carlo Sampling methods using Markov Chains and Their Applications. **Biometrika**, Oxford, v. 57, n. 1, p. 97-109, 1970.

HU, M. XU, C. WANG, J. Spatiotemporal analysis of men who have sex with men in mainland China: social app capture-recapture method. **JMIR mHealth uHealth**, Michigan, v. 8, nº 1, 2020.

LAPLACE, P. S. **Sur les naissances, les mariages et les morts**. Histoire de L'Académie Royale des Sciences, Paris, p. 693, 1786.

LINCOLN, F. C. Calculating waterfowl abundance on the basis of banding returns. **U.S. Departament of agriculture**, Washington, v. 118, p. 1-4, 1930.

LIU, Y. ZHU, L. LIU, G. & LI, H. Abundance estimation with a categorical covariate subject to missing in continuous-time capture-recapture studies. **Communications in Statistics: Theory and Methods**, Philadelphia, p. 4919-4928, 2020.

OLIVEIRA, J. O.; BUENO-FILHO, J. S. S. Dinâmica da frota de veículos que estacionam no centro de Lavras, M.G. **Revista Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 28, n. 5, p. 1135-1143, 2004.

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Transformando o nosso mundo: a agenda 2030 para o desenvolvimento sustentável.** Resolução A/RES/70/1 [internet]. Nova Iorque: UN; 2015. Disponível em: https://nacoesunidas.org/wp-content/uploads/2015/10/agenda2030-pt-br.pdf. Acesso em: 02 abril. 2024.

PAULA, M. **Um enfoque Bayesiano do modelo de captura-recaptura na presença de covariáveis**. Dissertação (Mestrado em estatística) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2006.

PETERSEN, C. G. J. The yearly immigration of young plaice into Limfjord from the German sea, etc. **Report of the Danish Biological Station**, Copenhague, v. 6, n. 1, p. 1-48, 1986.

PEZZOTT, G. L. M. **Modelos Espaciais de captura-recaptura para populações abertas**. Tese (Doutorado em Estatística) – Universidade Federal de São Carlos, 2018.

PEZZOTT, G. L. M., SALASAR, L. E. B., LEITE, J. G., LOUZADA, F. A note on identifiability and maximum likelihood estimation for a heterogeneous capture-recapture model. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, Philadelphia, v. 49, 2020.

R Core Team (2021). R: A language and environment for statistical computing. **R Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria. Disponível em https://www.R-project.org/. Acesso em: 04 abril. 2024.

SALASAR, L. E. B.; LEITE, J. G.; LOUZADA, F. On the integrated maximum likelihood estimators for a closed population capture-recapture model with unequal capture probabilities. **Statistics**, London, England, v. 49, p. 1204-1220, 2015.

SALASAR, L. E. B.; LEITE, J. G.; LOUZADA, F. Likelihood-based inference for population size in a capture-recapture experiment with varying probabilities from occasion to occasion. **Brazilian Journal of Probability and Statistics**, Durham, North Carolina, USA, v. 30, p. 47-69, 2016.

SCHNABEL, Z. E. The estimation of the total fish population of a lake. **American Mathematics Monthly**, Washington DC, USA, v. 45, p. 348-52, 1938.

SEBER, G. A. F. The Effects of Trap Response on Tag Recapture Estimates. **Biometrics**, Washington, v. 26, p. 13-22, 1970.

SEBER, G. A. F. The estimation of animal abundance and related parameters. **Charles Griffin and Company Ltd**, London, v. 4, p. 130-31, 1982.

SEKAR, C. C.; DEMING, W. E. On a method of estimating birth and death rates and the extent of registration. **Journal of the American Statistical Association**, United States, v. 44, n. 245, p. 101-115, 1949.

SILVA, C. R. de O. **Metodologia e organização do projeto de pesquisa: guia prático**. Editora CEFET, Universidade Federal do Ceará, 2004.

SMITH, A. F. M.; ROBERTS, G. O. Bayesian Computation via the Gibbs Sampler and Related Markov Chain Monte Carlo methods. **Journal of the Royal Statistical Society**, London, v. 55, n. 1, p .3-23, 1993.

SMITH, P. J. Bayesian analysis for a multiple capture-recapture model. **Biometrika**, Oxford, v. 78, n. 2, p. 399-407, 1991.

WANG, X. **Bayesian Analysis of Capture-recapture Models**. Ph.D, Dissertation (Doctor of Philosophy) – University of Missouri, Columbia, 2002.

WITTES, J. T. Applications of a multinomial capture-recapture model to epidemiological data. **Journal of the American Statistical Association**, United States, v. 69, n. 345, p. 93-7, 1974.

WITTES, J. T.; COLTON, T.; SIDEL, V. W. Capture-recapture methods for assessing the completeness of case ascertainment when using multiple information sources. **Journal of Chronic Diseases**, Atlanta, GA, USA, v. 27, n. 1 p. 25-36, 1974.

WITTES, J. T.; SIDEL, V. W. A generalization of the simple capture-recapture model with applications to epidemiological research. **Journal of Chronic Diseases**, Atlanta, GA, USA, v. 21, n. 5, p. 287-301, 1968.

ZACHARIAS, H. P. **Aplicação do algoritmo Gibbs sampling no processo de captura-recaptura**. Dissertação (Mestrado em estatística) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2000.