

## Um modelo SIR e o teste de Routh-Hurwitz

### A SIR model and the Routh-Hurwitz test

### Un modelo SIR y lo criterio de Routh-Hurwitz

Natanael de Jesus Oliveira<sup>1</sup>  
Patrícia Nunes da Silva<sup>2</sup>

**Resumo:** Os modelos compartimentais são utilizados em epidemiologia para descrever a dinâmica de transmissão de doenças. O objetivo deste trabalho é analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um modelo compartimental no qual as taxas de natalidade e mortalidade não são necessariamente iguais, e a natalidade é dependente do tamanho total da população. Para a análise da estabilidade de seus pontos de equilíbrio, aplicou-se o chamado teste de Routh-Hurwitz. Por completude, apresentou-se também uma prova do teste Routh-Hurwitz. Com a aplicação do teste, concluiu-se que os pontos de equilíbrio, o livre de doença e o endêmico, do modelo compartimental estudado, são assintoticamente estáveis.

**Palavras-chave:** Epidemiologia. Modelos compartimentais. Pontos de equilíbrio. Teste de Routh-Hurwitz.

**Abstract:** Compartmental models are used in epidemiology to describe the dynamics of disease transmission. The objective of this study is to analyze the stability of equilibrium points in a compartmental model where birth and death rates are not necessarily equal, and birth rate depends on the total population size. To analyze the stability of equilibrium points, we applied the so-called Routh-Hurwitz test. For completeness, we also provide a proof of the Routh-Hurwitz test. Through the application of the test, we conclude that the equilibrium points, both disease-free and endemic, in the studied compartmental model are asymptotically stable.

**Keywords:** Epidemiology. Compartmental models. Equilibrium points. Routh-Hurwitz test.

**Resumen:** Los modelos compartimentales se utilizan en epidemiología para describir la dinámica de transmisión de enfermedades. El objetivo de este trabajo es analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un modelo compartimental en el cual las tasas de natalidad y mortalidad no son necesariamente iguales, y la natalidad depende del tamaño total de la población. Para el análisis de la estabilidad de sus puntos de equilibrio, aplicamos el llamado criterio de Routh-Hurwitz. Por completitud, presentamos también una prueba del criterio Routh-Hurwitz. Con la aplicación del test, concluimos que los puntos de equilibrio, tanto el libre de enfermedad como el endémico, del modelo compartimental estudiado son asintóticamente estables.

**Palabras-clave:** Epidemiología. Modelos compartimentales. Puntos de equilibrio. Criterio de Routh-Hurwitz.

Submetido 28/11/2023

Aceito 09/09/2024

Publicado 24/09/2024

<sup>1</sup> Bacharelado em Matemática. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. <https://orcid.org/0009-0000-2179-6683>. E-mail: [natanaeldjo@gmail.com](mailto:natanaeldjo@gmail.com).

<sup>2</sup> Doutorado em Matemática Aplicada. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1852-7746>. E-mail: [nunes@ime.uerj.br](mailto:nunes@ime.uerj.br).

## Considerações Iniciais

As doenças infecciosas representam uma ameaça complexa e global para as populações humanas. As numerosas espécies de vírus, bactérias e organismos superiores capazes de infectar humanos mudaram o curso da história. Na década de 1960, melhorias no saneamento, avanços no desenvolvimento de antibióticos e programas de vacinação fizeram crer que as doenças infecciosas seriam erradicadas em um futuro próximo. Isso resultou em uma mudança de foco das pesquisas para doenças crônicas, como as cardiovasculares e o câncer, nos países industrializados. No entanto, novos surtos e pandemias resgataram o interesse no estudo dos modelos epidemiológicos.

Em 1968, dez anos após a pandemia de gripe asiática, a nova variante da gripe, H3N2, desencadeou uma pandemia, a gripe de Hong Kong, que matou cerca de um milhão de pessoas. A doença causada pelo vírus Ebola foi descrita em 1976, quando dois surtos da doença foram identificados na República Democrática do Congo e no Sudão do Sul. No início dos anos 1980, os primeiros casos de infecção por HIV foram identificados nos Estados Unidos, Haiti e África Central. Nos países em desenvolvimento, as doenças infecciosas permanecem como as principais causas de sofrimento e mortalidade. Agentes de doenças infecciosas continuaram a evoluir, resultando no surgimento de novas doenças e no ressurgimento de algumas já existentes. Fatores como interferência humana em novos ecossistemas, aquecimento global, degradação ambiental, aumento de viagens internacionais e mudanças nos padrões econômicos continuam a oferecer oportunidades para doenças infecciosas.

O interesse renovado em doenças infecciosas é impulsionado pelas doenças emergentes e reemergentes. Modelos matemáticos se tornaram ferramentas cruciais na análise da propagação e controle dessas doenças. O processo de formulação de modelos esclarece premissas, variáveis e parâmetros, proporcionando resultados conceituais, como limites, números básicos de reprodução, números de contato e números de substituição. Compreender as características de transmissão de doenças infecciosas em comunidades, regiões e países pode orientar abordagens mais eficazes para diminuir a transmissão dessas doenças. A modelagem epidemiológica contribui para a concepção e análise de inquéritos epidemiológicos, sugere dados cruciais a serem coletados, identifica tendências, faz previsões gerais e estima a incerteza nas previsões (Hethcote, 2000). Uma classe importante de tais modelos é a formada pelos modelos compartimentais.

Segundo Brauer, Castillo-Chavez e Feng (2019), modelos compartimentais são utilizados para a descrição de transmissão de doenças. Segundo Rodrigues (2016), o modelo compartimental SIR foi desenvolvido por Ronald Ross, William Hamer e outros no início do século XX. Os artigos teóricos de Kermack e McKendrick, entre 1927 e 1933 sobre modelos de doenças infecciosas, tiveram grande influência no desenvolvimento de modelos matemáticos de epidemiologia. Em um modelo compartimental, a população em estudo é dividida em compartimentos (classes), e são feitas hipóteses sobre a natureza e a taxa de transferência de um compartimento para outro. A variável independente nos modelos compartimentais é o tempo, representado por  $(t)$ . As taxas de transferência (variação da classe) entre os compartimentos são expressas matematicamente por derivadas em relação ao tempo. Esses modelos são descritos por sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs). A escolha de quais compartimentos incluir num modelo depende das características da doença específica que está sendo modelada e da finalidade do modelo.

Segundo Cronin (1977), uma propriedade qualitativa importante de sistemas de EDOs é a estabilidade estrutural. Em linhas gerais, considera-se um sistema autônomo  $n$ -dimensional

$$x' = f(x), \quad (A)$$

em que  $x'$  denota a derivada da função  $x(t)$  com respeito à variável temporal. Diz-se que (A) é estruturalmente estável se pequenas mudanças em  $f$  não alterarem a representação geométrica das soluções de (A). Por exemplo, se (A) tem um ponto de equilíbrio  $x_0$  tal que todas as curvas, soluções de (A), que se aproximam de  $x_0$  o suficiente, também se aproximam de  $x_0$  quando  $t$ , a variável independente, tende a infinito. Mesmo sem uma definição formal de estabilidade estrutural, é possível intuir que ela é uma condição razoável a ser imposta a uma equação diferencial que descreve um fenômeno biológico. Ao estudar sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares, muitas vezes é útil examinar os autovalores do sistema linearizado associado. Na análise de estabilidade de sistemas não lineares, basta conhecer o sinal da parte real dos autovalores da matriz Jacobiana (ou seja, saber se a parte real é positiva, negativa ou zero). Um aspecto de interesse na análise de comportamento de modelos compartimentais é o estudo de estabilidade de seus pontos de equilíbrio. Para esse estudo, utilizar-se-á o chamado teste de Routh-Hurwitz.

O critério de Routh-Hurwitz foi desenvolvido independentemente por Routh e Hurwitz no final do século XIX. Ele consiste em uma abordagem simples, mas poderosa, para

determinar o número de raízes de um polinômio que se encontram no semiplano à direita do eixo imaginário (RHP), sem a necessidade de calcular essas raízes. Através da utilização dos coeficientes do polinômio e de um cálculo simples, uma matriz é construída. Então, o número de raízes no RHP é obtido com base no número de mudanças de sinal na primeira coluna da matriz Routh. Em 1877, o *Adams Prize* propôs a determinação de critérios para a estabilidade de um sistema dinâmico. O vencedor foi Edward John Routh. O critério apresentado por Routh (1877) em seu ensaio *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, Particularly Steady Motion* se tornou um marco para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos e para a teoria de controle. Ele é ainda hoje usado por engenheiros em problemas de controle. Segundo Kang (2016), em 1895, o matemático Hurwitz estabeleceu um critério de estabilidade que analisava os sinais dos chamados determinantes de Hurwitz. Em 1911, o matemático italiano Enrico Bompiani provou que os critérios de Routh e Hurwitz são equivalentes. O problema da distribuição de raízes de um polinômio desperta o interesse da comunidade acadêmica há muito tempo. Ele é crucial em diversas aplicações matemáticas e de engenharia, como análise espectral, cálculos numéricos, teoria de controle e processamento digital de sinais.

Neste trabalho, analisa-se o modelo proposto por Brauer, Castillo-Chavez e Feng (2019), em que as taxas de natalidade e mortalidade não são necessariamente iguais, e a natalidade é dependente do tamanho total da população. Usa-se o teste de Routh-Hurwitz para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo.

## Metodologia

Nesta seção, apresenta-se o teste de Routh-Hurwitz, que será utilizado na análise dos pontos de equilíbrio do sistema de EDOs associado ao modelo compartimental em estudo. Por completude, apresenta-se no Apêndice a prova do teste Routh-Hurwitz, combinando e detalhando as demonstrações de Bodson (2020) e Meisma (1995).

Dado um polinômio

$$p(s) = c_0s^n + c_1s^{n-1} + \dots + c_n, \quad (1)$$

$c_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, \dots, n$  e  $c_0 \neq 0$ , diz-se que  $p$  é estável se todas as suas raízes possuem parte real negativa. Para aplicar o teste de Routh-Hurwitz, inicialmente se constrói a tabela de Routh do

polinômio dado em (1). Suas duas primeiras linhas são formadas pelos coeficientes de  $p(s)$ , como indicado na tabela abaixo:

$$\begin{array}{l|cccc} s^n & c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & \cdots \\ s^{n-1} & c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \cdots \\ s^{n-2} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Os elementos da terceira linha, rotulada por  $s^{n-2}$ , são da forma

$$x_1 = \frac{c_1 c_2 - c_0 c_3}{c_1}, \quad x_2 = \frac{c_1 c_4 - c_0 c_5}{c_1}, \quad \dots$$

De maneira geral, os termos  $r_{ij}$  da  $i$ -ésima linha são dados por

$$r_{ij} = r_{i-2,j+1} - \frac{r_{i-2,1}}{r_{i-1,1}} r_{i-1,j+1}, \quad (i > 2) \quad (2)$$

O processo é repetido até que se alcance a linha rotulada por  $s^0$  ou até que algum elemento da primeira coluna se anule.

Se um polinômio  $p(s)$  é ímpar, existe um polinômio  $k(s)$  tal que  $p(s) = sk(s^2)$  e que se é par, existe um polinômio  $k(s)$  tal que  $p(s) = k(s^2)$ . Além disso, todo polinômio  $p(s)$  pode ser escrito como a soma de um polinômio par e um ímpar. Bodson (2020) observa que as duas primeiras linhas da tabela de Routh são formadas pelos coeficientes dos polinômios

$$\begin{aligned} p_1(s) &= c_0 s^n + c_2 s^{n-2} + \cdots, \\ p_2(s) &= c_1 s^{n-1} + c_3 s^{n-3} + \cdots, \end{aligned}$$

Se  $n$  é par,  $p_1(s)$  é par, e  $p_2(s)$  é ímpar. Se  $n$  é ímpar,  $p_1(s)$  é ímpar, e  $p_2(s)$  é par. Além disso,  $p(s) = p_1(s) + p_2(s)$ . Define-se o polinômio  $p_3(s)$  como o resto da divisão de  $p_1(s)$  por  $p_2(s)$ . Isto é,

$$p_1(s) = \left( \frac{c_0}{c_1} s \right) p_2(s) + p_3(s).$$

A terceira linha da tabela de Routh é formada pelos coeficientes de  $p_3(s)$ . Por um processo recursivo, define-se os polinômios  $p_k(s)$

$$p_{k+2}(s) = p_k(s) - q_k(s)p_{k+1}(s), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Os polinômios  $p_k(s)$  são da forma

$$p_k(s) = r_{k,1} s^{n-k+1} + \dots$$

em que  $r_{k,1}$  é elemento da  $k$ -ésima linha da primeira coluna da tabela de Routh. Tem-se  $r_{1,1} = c_0$ ,  $r_{2,1} = c_1$  e, para  $k > 2$ , por (2),

$$r_{k,1} = r_{k-2,2} - \frac{r_{k-2,1}}{r_{k-1,1}} r_{k-1,2}.$$

O polinômio  $q_k(s)$ , quociente entre  $p_{k+1}(s)$  e  $p_k(s)$ , é dado por

$$q_k(s) = \frac{r_{k,1}}{r_{k+1,1}} s, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Os polinômios  $p_k(s)$  formam uma sequência de polinômios que se alternam entre polinômios pares e ímpares e têm grau decrescente. Se nenhum  $r_{k,1}$  se anula, lembrando da alternância de paridade, os dois últimos polinômios da sequência são  $p_n(s) = r_{n,1}s$  (polinômio ímpar) e  $p_{n+1}(s) = r_{n+1,1}$  (polinômio par). Observa-se também que, se  $p_k(s)$  e  $p_{k+1}(s)$  tivessem um zero em comum, o resto de sua divisão ( $p_{k+2}(s)$ ) seria um polinômio nulo, e o algoritmo terminaria prematuramente. Vale a recíproca. Diz-se que se tem um caso regular se nenhum elemento da primeira coluna é igual a zero. Nas demais situações, tem-se um caso singular, e o algoritmo é interrompido prematuramente.

À sequência de polinômios  $p_k(s)$ , pode-se associar a sequência  $p_k(s) + p_{k+1}(s)$ . Nota-se que  $p(s) = p_1(s) + p_2(s)$ . Levando em conta a alternância de paridade da sequência  $p_k(s)$ , vê-se que, para montar a tabela de Routh do polinômio  $p_k(s) + p_{k+1}(s)$ , basta considerar a tabela de Routh de  $p(s)$  a partir da  $k$ -ésima linha.

**Teorema 1 (Teste de Routh-Hurwitz):** Um polinômio  $p(s) = c_0s^n + c_1s^{n-1} + \dots + c_n$ , ( $c_i \in R, c_0 \neq 0$ ) é estável se, e somente se, os  $n + 1$  elementos da primeira coluna da tabela de Routh

$$\begin{array}{cccc} c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & \dots \\ c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & \dots & \\ r_{4,1} & r_{4,2} & r_{4,3} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ r_{n+1,1} & & & & \end{array}$$

são diferentes de zero e têm o mesmo sinal.

A prova do Teorema 1 (ver Apêndice) explora uma **ideia-chave**: supõe-se que  $r_{1,1}, \dots, r_{k+1,1} \neq 0$ . Nesse caso, a quantidade de raízes com parte real negativa (ou parte real positiva) do polinômio  $p_k(s) + p_{k+1}(s)$  é igual à de raízes do polinômio  $(1 +$

$q_k(s))(p_{k+1}(s) + p_{k+2}(s))$  com parte real negativa (ou parte real positiva). Os dois polinômios considerados compartilham, contadas as multiplicidades, as raízes imaginárias puras.

A prova dessa afirmação será feita através de uma homotopia e da alternância de paridade da sequência de polinômios  $p_k(s)$ . Antes de prosseguir, seguem algumas implicações da ideia-chave:

- Se  $r_{k+1,1} = 0$  para algum  $k$ , então  $p(s)$  tem ao menos uma raiz com parte real não negativa. De fato,  $r_{k+1,1} = 0$  se e somente se o segundo coeficiente do polinômio  $p_k(s) + p_{k+1}(s)$  é nulo. Isso implica que a soma de suas raízes dá zero. Nem todas as suas raízes podem ter parte real negativa. Logo,  $p_k(s) + p_{k+1}(s)$  tem ao menos uma raiz com parte real não negativa. Pelas homotetias, a quantidade de raízes de  $p(s)$  com parte real não negativa é maior ou igual à de  $p_k(s) + p_{k+1}(s)$ .
- Reciprocamente, se todas as raízes de  $p(s)$  têm parte real negativa, a cadeia de homotetias garante que  $p(s)$  é regular. Isto é,  $r_{k,1} \neq 0$  para  $k = 1, \dots, n + 1$ .

Quando a tabela de Routh de um polinômio  $p(s)$  é regular, o teste de Routh-Hurwitz garante que a quantidade de suas raízes que possuem parte real positiva coincide com a quantidade de trocas de sinal na primeira coluna da tabela de Routh. No caso regular, o teste de Routh permite caracterizar os chamados polinômios estáveis (todas as raízes têm parte real negativa).

## Análise dos Dados e Resultados

Nesta seção, apresentar-se-á uma família de modelos epidemiológicos: os modelos compartimentais. Eles correspondem a uma técnica de modelagem aplicada à transmissão de doenças em uma população.

Segundo Dietz e Heesterbeek (2002), em 1760, Daniel Bernoulli (1700-1782), um matemático suíço, membro de uma família de talentosos matemáticos, físicos e filósofos, estava interessado em avaliar a eficácia da variolação (técnica de inoculação preventiva contra a varíola) em pessoas saudáveis. Ele foi estimulado a investigar a controvérsia da inoculação por Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1668-1759), um filósofo, matemático e astrônomo francês, e Charles Marie de la Condamine (1701-1774), um cientista e explorador francês. Condamine

forneceu a Bernoulli dados sobre a incidência e a letalidade da varíola e a segurança da inoculação.

No modelo de Bernoulli, a população é dividida em suscetíveis, ou seja, aqueles que ainda não foram infectados, e imunes, ou seja, aqueles que foram imunizados para o resto da vida após uma infecção. A taxa de mortalidade devido a todas as causas, exceto devido à infecção, é indicada por  $\mu$ . A força da infecção  $\lambda$  é a taxa segundo a qual os suscetíveis são infectados. Apenas uma fração  $s(a)$  deles sobrevive para tornar-se imune. O resto  $c(a) = 1 - s(a)$  pode morrer devido à infecção. Tradicionalmente,  $c(a)$  é chamada de taxa de letalidade. Como não é uma taxa (com dimensão por unidade de tempo), mas uma probabilidade, ou seja, uma quantidade adimensional, é usualmente chamada de fatalidade. Se  $u(a)$  é a probabilidade de um indivíduo recém-nascido estar vivo e suscetível na idade  $a$ , então, de acordo com o modelo de Bernoulli, escrito em notação moderna,  $u(a)$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{da} = -(\lambda + \mu)u, \quad \text{com a condição inicial } u(0) = 1.$$

A probabilidade  $w(a)$  de estar imune e vivo é dada por

$$\frac{dw}{da} = (1 - c(a))\lambda u - \mu w, \quad \text{com a condição inicial } w(0) = 0.$$

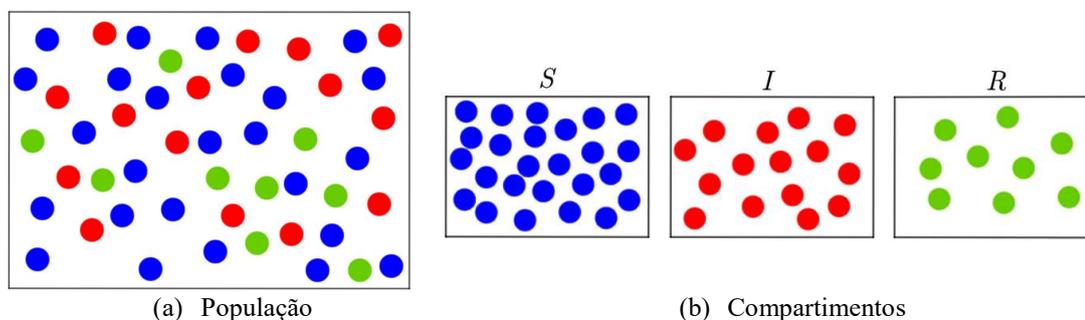
Escrito em notação moderna, o modelo de Bernoulli pode ser visto como precursor dos chamados modelos compartimentais.

No modelo SIR, a população é dividida em três classes: Suscetíveis, Infectados e Recuperados. As iniciais dessas classes formam a sigla SIR, que nomeia o modelo. Em cada instante  $t$ , tem-se:

- $S(t)$ : o número de indivíduos suscetíveis à doença, ou seja, que não estão (ainda) infectados no instante  $t$ ;
- $I(t)$ : o número de indivíduos infectados, cada um deles é considerado infectante e capaz de disseminar a doença através de contato com suscetíveis;
- $R(t)$ : o número de indivíduos que foram infectados e ficaram imunes. A classe  $R(t)$  pode conter indivíduos isolados do resto da população, imunizados contra a infecção ou recuperados da doença com imunidade total contra reinfeção.

Em muitas doenças, os infecciosos retornam à classe de suscetível após a recuperação. Essas doenças são transmitidas por agentes bacterianos ou agentes helmínticos ou são doenças sexualmente transmissíveis, por exemplo (mas não doenças como AIDS, das quais não há recuperação). Usa-se modelos SIS (Suscetíveis, Infectados, Suscetíveis) para descrever uma doença para a qual não se adquire imunidade contra a reinfeção e se usa modelos SIR para descrever uma doença que confere imunidade contra a reinfeção. Para formular um modelo compartimental, é necessário fazer algumas suposições sobre as taxas de fluxo entre os compartimentos. A suposição mais comum é admitir que a disseminação da infecção depende do número de indivíduos suscetíveis e do número de infectados, e que a taxa de novas infecções segue uma lei de ação de massas. O uso da lei de ação de massas se inspira na química. A lei de ação de massas é um modelo matemático que explica e prediz comportamentos de soluções em equilíbrio dinâmico. A lei diz que a velocidade de uma reação química elementar, isto é, uma reação química que ocorre em apenas uma etapa, é proporcional à concentração dos reagentes. No modelo compartimental, ela indicará que novas infecções dependem do contato entre indivíduos suscetíveis e infectados e do tamanho de cada uma dessas subpopulações. Assumir-se-á, também, que os contatos dos indivíduos suscetíveis e os indivíduos infectados são contatos eficazes, ou seja, a infecção sempre será passada para os suscetíveis. Na Figura 1(a), vê-se a população contendo indivíduos suscetíveis (em azul), infectados (em vermelho) e recuperados (em verde). Na Figura 1(b), os indivíduos foram separados, conforme sua condição, em seus respectivos compartimentos  $S$ ,  $I$  e  $R$ .

Figura 1 – Modelo SIR



Fonte: Autores, 2023.

O modelo *SIR* de Kermack e McKendrick (1991) considera, na classe de suscetíveis, uma taxa de natalidade proporcional ao tamanho total da população e, em cada uma das três classes do modelo, uma taxa de mortalidade proporcional ao seu tamanho. Esse modelo permite que a população total cresça ou decaia exponencialmente se as taxas de natalidade e mortalidade forem distintas. Para obter um modelo que considere nascimentos e mortes naturais e no qual o tamanho total da população permaneça constante, pode-se usar a abordagem proposta por Hethcote (1976). Nela, o tamanho total da população  $N$  permanece constante, pois não se considera a mortalidade pela doença, e as taxas de natalidade e mortalidade são iguais. O modelo é dado por

$$S' = -\beta SI + \mu(N - S),$$

$$I' = \beta SI - \alpha I - \mu I,$$

$$R' = \alpha I - \mu R.$$

Ao longo do trabalho, o símbolo ' indica a derivada da função com respeito à variável temporal. As hipóteses subjacentes a esse modelo são:

- (i) A taxa de novas infecções é dada pela lei da ação de massa: a taxa de contato entre dois grupos em uma população é proporcional ao tamanho de cada um dos grupos envolvidos. A constante de proporcionalidade está denotada por  $\beta$
- (ii) Os infectados se recuperam a uma taxa  $\alpha I$  por unidade de tempo.
- (iii) As taxas de natalidade e mortalidade são iguais e denotadas por  $\mu$ .
- (iv) Não há mortes causadas pela doença.

Brauer, Castillo-Chavez e Feng (2019) flexibilizam a hipótese (iii) e consideram um modelo mais geral em que as taxas de natalidade e mortalidade não são necessariamente iguais, e a natalidade é dependente do tamanho total  $N(t)$  da população no instante  $t$ :

$$S' = \Lambda(N) - \beta SI - \mu S,$$

$$I' = \beta SI - \alpha I - \mu I, \tag{3}$$

$$N' = \Lambda(N) - \mu N.$$

Para que o modelo (3) seja um problema bem posto, ele deve admitir uma solução única (assim, ele gera uma informação que pode ter sentido epidemiológico), e tal solução tem que

ser não negativa (novamente para garantir sentido epidemiológico). Nota-se que, para  $S = 0$ , tem-se  $S' \geq 0$ , e para  $I = 0$  se tem  $I' \geq 0$ . Logo, para  $t \geq 0$ , tem-se  $S \geq 0$  e  $I \geq 0$ . Como em Brauer, Castillo-Chavez e Feng (2019), far-se-á algumas hipóteses sobre  $\Lambda$ : existe  $K > 0$  tal que  $\Lambda(K) = \mu K$  e  $\Lambda'(K) < \mu$ . Elas garantem que a população  $N(t)$  admite um ponto de equilíbrio assintoticamente estável; a população  $N(t)$  se aproxima de  $K$ , capacidade de suporte, quando  $t$  vai para infinito. Como  $N' \leq 0$  quando  $N \geq K$ , tem-se  $N \leq K$  para  $t \geq 0$ . Assim, a solução sempre permanece na região em que faz sentido biologicamente  $S \geq 0, I \geq 0, 0 \leq N \leq K$ , desde que os dados iniciais sejam tomados nessa região.

Brauer, Castillo-Chavez e Feng (2019) indicam que a análise qualitativa do modelo (3) depende dos conceitos de equilíbrio e de linearização de sistemas em torno de seus pontos de equilíbrio. No livro, os autores não apresentam os detalhes, mas indicam os passos da análise. Neste trabalho, calcula-se os pontos de equilíbrio (livre de doença e endêmico) do modelo (3) e se faz o estudo de estabilidade assintótica deles. A natureza dos pontos de equilíbrio do modelo SIR está diretamente ligada ao chamado número de reprodução básico  $\mathcal{R}_0$ . Em linhas gerais, este indica o número esperado de infecções secundárias na população de suscetíveis. Para o modelo (3), ele é dado por

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta K}{\alpha + \mu}, \quad (4)$$

em que  $K$  é a capacidade de suporte, calculada anteriormente como o valor limite da população  $N(t)$  quando  $t$  tende a infinito.

### **Análise dos pontos de equilíbrio**

Nem sempre é possível encontrar as soluções exatas para equações diferenciais, o que torna interessante realizar um estudo qualitativo dessas equações sem a necessidade de resolvê-las diretamente. Uma maneira de fazer essa análise é examinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio das equações diferenciais, observando, assim, o comportamento das trajetórias do sistema nas proximidades de um ponto de equilíbrio. Para a análise de estabilidade, calcula-se os pontos de equilíbrio do sistema autônomo (3), pontos em que as derivadas temporais em (3) se anulam. Isto é, procura-se soluções  $(S_\infty, I_\infty, N_\infty)$  de:

$$\begin{cases} 0 = \Lambda(N) - \beta SI - \mu S \\ 0 = \beta SI - \mu I - \alpha I \\ 0 = \Lambda(N) - \mu N \end{cases} \quad (5)$$

Da segunda equação em (5), tem-se

$$I_{\infty}(\beta S_{\infty} - \mu - \alpha) = 0. \quad (6)$$

Isto é, ela se anula se, e somente se,  $I_{\infty} = 0$  ou  $\beta S_{\infty} = \mu + \alpha$ . Da terceira, vê-se que  $N_{\infty} = K$ . Analisar-se-á, separadamente, os dois casos. Inicialmente, considerar-se-á o ponto de equilíbrio livre de doença  $I_{\infty} = 0$ . Tomando  $I = 0$  em (5), tem-se:

$$\Lambda(N_{\infty}) - \mu S_{\infty} = 0 = \Lambda(N_{\infty}) - \mu N_{\infty}.$$

Logo,  $N_{\infty} = S_{\infty}$ . Assim, o ponto de equilíbrio livre de doença é dado por:

$$(N_{\infty}, 0, N_{\infty}), \quad \Lambda(N_{\infty}) = \mu N_{\infty} = \mu K. \quad (7)$$

Agora, considera-se o equilíbrio endêmico. Por (6), tem-se  $\beta S_{\infty} = \mu + \alpha$ . Tomando  $S = (\mu + \alpha)/\beta$  em (5), tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda(N_{\infty}) - I_{\infty}(\mu + \alpha) - \frac{\mu}{\beta}(\mu + \alpha) \\ 0 &= \Lambda(N_{\infty}) - \mu N_{\infty} \end{aligned}$$

O ponto de equilíbrio endêmico é dado por

$$(S_{\infty}, I_{\infty}, N_{\infty}) = \left( \frac{\mu + \alpha}{\beta}, \frac{\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \frac{\mu}{\beta}, K \right). \quad (8)$$

Para a análise da estabilidade, é necessário linearizar o sistema em torno do ponto de equilíbrio em estudo. Sejam

$$F(S, I, N) = \Lambda(N) - \beta SI - \mu S$$

$$G(S, I, N) = \beta SI - \mu I - \alpha I$$

$$H(S, I, N) = \Lambda(N) - \mu N$$

derivando em relação a  $S$ ,  $I$  e  $N$ , tem-se

$$F_S = -\beta I - \mu \quad G_S = \beta I \quad H_S = 0$$

$$F_I = -\beta S \quad G_I = \beta S - (\mu + \alpha) \quad H_I = 0$$

$$F_N = \Lambda'(N) \quad G_N = 0 \quad H_N = \Lambda'(N) - \mu$$

As funções  $F$ ,  $G$  e  $H$  aparecem ao lado direito do sistema (3). Usar-se-á suas derivadas para obter uma aproximação de primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio para o sistema (3). A matriz de coeficientes no processo de linearização do sistema (3) em torno de um ponto de equilíbrio será  $3 \times 3$ , e a equação característica resultante é uma equação polinomial cúbica. O estudo do comportamento das raízes no caso do ponto de equilíbrio livre de doença (7) é mais simples. Já para o estudo de estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico (8), usar-se-á o teste de Routh-Hurwitz (Teorema 1).

Inicialmente, considerar-se-á o ponto de equilíbrio livre de doença (7). Lembrando que  $F(N_\infty, 0, N_\infty) = G(N_\infty, 0, N_\infty) = H(N_\infty, 0, N_\infty) = 0$  e considerando as novas variáveis  $x = S - S_\infty$ ,  $y = I - I_\infty$  e  $z = N - N_\infty$ , a linearização do sistema (3) é dada por

$$\begin{aligned}x' &= -\mu x - \beta N_\infty y + \Lambda'(N_\infty)z \\y' &= (\beta N_\infty - (\mu + \alpha))y \\z' &= (\Lambda'(N_\infty) - \mu)z\end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes do sistema linearizado é dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta N_\infty & \Lambda'(N_\infty) \\ 0 & \beta N_\infty - (\mu + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda'(N_\infty) - \mu \end{bmatrix}$$

Calculando seus autovalores, tem-se

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta N_\infty & \Lambda'(N_\infty) \\ 0 & \beta N_\infty - (\mu + \alpha) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda'(N_\infty) - \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Isto é,

$$\lambda_1 = -\mu, \quad \lambda_2 = \Lambda'(N_\infty) - \mu, \quad \lambda_3 = \beta N_\infty - (\mu + \alpha).$$

Para que o ponto de equilíbrio  $(N_\infty, 0, N_\infty)$  seja estável, é preciso que todas as raízes do polinômio característico associado tenham parte real negativa. Assim, deve-se ter

$$\Lambda'(K) - \mu < 0 \quad e \quad \beta K - (\mu + \alpha) < 0.$$

A primeira desigualdade é satisfeita em conformidade com as hipóteses previamente feitas sobre a função  $\Lambda$ . A segunda está associada ao número de reprodução básico  $\mathcal{R}_0$  do modelo SIR (ver (4)) e de termos  $\Lambda(N_\infty) = \mu K$  (ver (7)). Nota-se que a estabilidade requer

$\mathcal{R}_0 < 1$ . Isso é a força da infecção; sua capacidade de gerar casos secundários não é suficiente para gerar uma epidemia, e o sistema tende a convergir para o ponto de equilíbrio livre de doença. Se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , o ponto de equilíbrio livre de doença é instável.

Fazendo a linearização do sistema (3) em torno do ponto de equilíbrio endêmico (8), tem-se:

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha}x - (\mu + \alpha)y + \Lambda'(K)z \\y' &= \beta\left(\frac{\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \frac{\mu}{\beta}\right)x \\z' &= (\Lambda'(K) - \mu)z\end{aligned}$$

A equação característica da matriz dos coeficientes do sistema linearizado é dada por

$$\begin{vmatrix}-\frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \lambda & -(\mu + \alpha) & \Lambda'(K) \\ \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda'(K) - \mu - \lambda\end{vmatrix} = 0.$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\lambda^3 - \lambda^2 \left[ \Lambda'(K) - \mu - \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} \right] \\ - \lambda \left[ \frac{\beta\Lambda(K)(\Lambda'(K) - \mu)}{\mu + \alpha} - (\mu + \alpha) \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu \right) \right] + \\ - (\mu + \alpha) \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu \right) (\Lambda'(K) - \mu) = 0.\end{aligned}$$

O polinômio acima é da forma:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{9}$$

com

$$a_1 = \mu - \Lambda'(K) + \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha}, \tag{10}$$

$$a_2 = \frac{\beta\Lambda(K)(\mu - \Lambda'(K))}{\mu + \alpha} + (\mu + \alpha) \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu \right), \quad (11)$$

$$a_3 = (\mu + \alpha) \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu \right) (\mu - \Lambda'(K)). \quad (12)$$

Quer-se saber o sinal da parte real de suas raízes. Em Routh (1877, p. 27), são apresentadas as condições de Routh–Hurwitz para a estabilidade de (9):

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3 > 0. \quad (13)$$

Elas são condições necessárias e suficientes para que todas as raízes da equação característica tenham parte real negativa. Elas se verificam para o ponto de equilíbrio endêmico do modelo (3). Serão deduzidas a partir da aplicação do Teorema 1. Considerando o caso regular, a tabela de Routh para o polinômio  $p(\lambda)$  em (9) é dada por

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & a_2 - \frac{a_3}{a_1} & 0 \\ s^0 & a_3 & 0 \end{array}$$

Pelo Teorema 1, para que o polinômio  $p$  em (9) seja estável, os termos da primeira coluna de sua tabela de Routh devem ter o mesmo sinal. Isto é, as condições em (13) devem verificar-se.

Sabe-se, por hipótese, que  $\Lambda'(K) < \mu$ . Além disso,

$$0 < I_\infty = \frac{\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \frac{\mu}{\beta} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu \right).$$

Consequentemente,

$$\frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} > \mu > 0.$$

Logo, os coeficientes em (10) e (12) satisfazem  $a_1 > 0$  e  $a_3 > 0$ . Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= \frac{\beta\Lambda(K)(\mu - \Lambda'(K))^2}{\mu + \alpha} + (\mu + \alpha)(\mu - \Lambda'(K)) \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu \right) \\ &\quad + \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} \right)^2 (\mu - \Lambda'(K)) + \beta\Lambda(K) \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu \right) \\ &= a_3 + \frac{\beta\Lambda(K)(\mu - \Lambda'(K))^2}{\mu + \alpha} + \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} \right)^2 (\mu - \Lambda'(K)) + \beta\Lambda(K) \left( \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu + \alpha} - \mu \right) \end{aligned}$$

Como  $\Lambda'(K) < \mu$  e  $\frac{\beta\Lambda(K)}{\mu+\alpha} > \mu > 0$ , os coeficientes em (10), (11) e (12) satisfazem  $a_1 a_2 > a_3$ .

Assim, pelo Teorema 1, o equilíbrio endêmico é assintoticamente estável. Novamente, ao lembrar-se que  $\Lambda(K) = \mu K$ , vê-se que a condição  $\frac{\beta\Lambda(K)}{\mu+\alpha} > \mu > 0$  pode ser reescrita como

$$\mu(\mathcal{R}_0 - 1) = \mu \left( \frac{\beta K}{\mu+\alpha} - 1 \right) = \frac{\beta\Lambda(K)}{\mu+\alpha} - \mu > 0.$$

Isto é, se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , o ponto de equilíbrio endêmico é assintoticamente estável, e a doença avança na população. Caso contrário, é instável.

A aplicação do teste de Routh-Hurwitz permitiu a análise do comportamento dos pontos de equilíbrio do sistema de EDOs (3) e a classificação tanto do seu ponto de equilíbrio livre de doença quanto o endêmico em relação à estabilidade. A natureza do comportamento dos pontos de equilíbrio do sistema (3) está diretamente ligada ao número de reprodução básico  $\mathcal{R}_0$ .

### Considerações Finais

Os modelos fornecem aos epidemiologistas um mundo ideal no qual fatores individuais podem ser examinados isoladamente, e todas as facetas da doença se espelham e são registradas. Viu-se, neste trabalho, algumas ferramentas matemáticas para a análise de comportamento de longo prazo de soluções de um modelo compartimental. A aplicação do teste de Routh-Hurwitz se mostrou útil para a análise do comportamento dos pontos de equilíbrio do modelo compartimental estudado. O ponto de equilíbrio livre de doença e o endêmico são assintoticamente estáveis quando o número de reprodução básico  $\mathcal{R}_0$  é, respectivamente, menor ou maior do que um. Esse resultado se deve ao fato de que as partes reais, raízes do polinômio característico associado a cada ponto de equilíbrio, são negativas. Não é possível determinar facilmente as raízes do polinômio de grau três associado ao ponto de equilíbrio endêmico. No entanto, o teste de Routh-Hurwitz permite a determinação do sinal da parte real das raízes a partir de relações entre os coeficientes do polinômio característico. Com essa ferramenta, alcançou-se o objetivo proposto de analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um modelo compartimental no qual as taxas de natalidade e mortalidade não são necessariamente iguais, e a natalidade é dependente do tamanho total da população. Viu-se que a natureza dos pontos de equilíbrio está associada à ocorrência ou não de uma epidemia. Vale ressaltar que,

com o aumento de novas tecnologias e o crescimento da interdisciplinaridade, pesquisadores estão interessando-se pela aplicação de modelos epidemiológicos em outras áreas, ampliando o potencial dessa importante ferramenta matemática.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio do CNPq, da UERJ e da Faperj, processos E26/010.101140/2018 e E-26/210.177/2022.

### Referências

BODSON, Marc. Explaining the Routh–Hurwitz Criterion: A Tutorial Presentation, **IEEE Control Systems Magazine**, Piscataway, v. 40, p. 45-51, 2020.

BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C.; FENG, Z. **Mathematical Models in Epidemiology**, Nova Iorque, Springer, 2019.

CRONIN, Jane. Some Mathematics of Biological Oscillations. **SIAM Review**, Filadélfia, v. 19, p. 100-138, 1977.

DIETZ, K.; HEESTERBEEK, J. A. P. Daniel Bernoulli’s epidemiological model revisited, **Mathematical Biosciences**, Amsterdã, v. 180, p. 1-21, 2002.

HETHCOTE, Herbert. W. Qualitative analyses of communicable disease models, **Mathematical Biosciences**, Amsterdã, v. 28, p. 335–356, 1976.

HETHCOTE, Herbert. W. The Mathematics of Infectious Diseases. **SIAM Review**, Filadélfia, v. 42, p. 599-653, 2000.

KANG, Chul-Goo. Origin of Stability Analysis: “On Governors” by J.C. Maxwell. **IEEE Control Systems Magazine**, Piscataway, v. 36, p. 77-88, 2016.

KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. Contributions to the mathematical theory of epidemics II. the problem of endemicity, **Bulletin of Mathematical Biology**, Nova Iorque, v. 53, p. 57-87, 1991.

MEINSMA, Gjerrit. Elementary proof of the Routh-Hurwitz test, **Systems & Control Letters**, Amsterdã, v. 25, p. 237-242, 1995.

RODRIGUES, Helena Sofia. Application of SIR Epidemiological Model: New Trends. **International Journal of Applied Mathematics and Informatics**, Bridgewater, v. 10, p. 92-97, 2016.

ROUTH, Edward John. **A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion**. Londres, Macmillan and Company, 1877.

## Apêndice

*Prova do Teorema 1.* Considere um polinômio com coeficientes reais. Se ele,  $p_e(s)$ , é par e o avaliamos em um imaginário puro  $s = iw$ , com  $w \in R$ , temos que  $p_e(iw)$  é um número real. Como  $p_e(s) = p_e(-s)$ , suas raízes pares de raízes imaginárias puras ( $s = \pm ib$ ,  $b \in R$ ) ou raízes complexas da forma  $s = \pm a \pm ib$ ,  $a, b \in R$ ,  $a \neq 0$ . Se o polinômio  $p_o(s)$  é ímpar e o avaliamos em um imaginário puro  $s = iw$ , com  $w \in R$ , temos que  $p_o(iw)$  é um imaginário puro. Além disso, existe um polinômio par  $p_e(s)$  tal que  $p_o(s) = sp_e(s)$ . Logo, além da raiz  $s = 0$ , suas raízes são pares de raízes imaginárias puras ( $s = \pm ib$ ,  $b \in R$ ) ou raízes complexas da forma  $s = \pm a \pm ib$ ,  $a, b \in R$ ,  $a \neq 0$ .

Para cada  $k$ , vamos considerar o polinômio

$$\begin{aligned} d_{k,\gamma}(s) &= p_k(s) + p_{k+1}(s) + \gamma q_k(s)p_{k+2}(s) \\ &= p_{k+2}(s) + q_k(s)p_{k+1}(s) + p_{k+1}(s) + \gamma q_k(s)p_{k+2}(s) \\ &= (1 + q_k(s))p_{k+1}(s) + (1 + \gamma q_k(s))p_{k+2}(s), \end{aligned} \quad (A1)$$

em que  $\gamma \in [0,1]$ . Para  $\gamma = 0$ ,  $d_{k,0}(s) = p_k(s) + p_{k+1}(s)$ . Para  $\gamma = 1$ ,

$$d_{k,1}(s) = (1 + q_k(s))(p_{k+1}(s) + p_{k+2}(s))$$

O polinômio  $d_{k,\gamma}(s)$  em (A1) é a soma de  $p_k(s)$  com dois polinômios de grau mais baixo. Portanto, o grau de  $d_{k,\gamma}(s)$  é igual a  $n - k + 1$  para todo  $\gamma \in [0,1]$ , e ramos contínuos conectam as raízes de  $d_{k,0}(s)$  às de  $d_{k,1}(s)$ .

Observe que uma raiz de  $d_{k,\gamma}(s)$  pertence ao eixo imaginário se, e somente se, para algum  $w_0 \in R$

$$(1 + q_k(iw_0))p_{k+1}(iw_0) + (1 + \gamma q_k(iw_0))p_{k+2}(iw_0) = 0. \quad (A2)$$

Devido à alternância de paridade da sequência  $p_k(s)$  e ao fato de  $q_k(s) = \frac{r_{k,1}}{r_{k+1,1}}s$ , as partes imaginária e real de (A2) satisfazem

$$p_{k+2}(iw_0) + q_k(iw_0)p_{k+1}(iw_0) = 0 \quad (A3)$$

$$p_{k+1}(iw_0) + \gamma q_k(iw_0)p_{k+2}(iw_0) = 0.$$

Segue daí que

$$(1 - \gamma q_k^2(iw_0))p_{k+2}(iw_0) = 0. \quad (A4)$$

Em (A4), temos

$$1 - \gamma q_k^2(iw_0) = 1 + \gamma \frac{r_{k,1}^2 w_0^2}{r_{k+1,1}^2} \geq 1$$

e  $p_{k+2}(iw_0) = 0$ . Por (A3),  $p_{k+1}(iw_0) = 0$ . Portanto,  $d_{k,\gamma}(iw_0) = 0$  para algum  $\gamma$ ,  $iw_0$  é raiz de  $p_k(s) + p_{k+1}(s)$ , de  $p_{k+1}(s) + p_{k+2}(s)$  e de  $d_{k,\gamma}(s)$  para todo  $\gamma \in [0,1]$ . As raízes imaginárias puras permanecem em seu lugar. Assim, nenhuma raiz de  $d_{k,\gamma}(s)$  pode se mover do semiplano à esquerda do eixo imaginário para o eixo imaginário nem pode se mover do semiplano à direita do eixo imaginário para o eixo imaginário. Portanto, nenhuma raiz pode se mover do semiplano à esquerda do eixo imaginário para o semiplano à direita dele ou vice-versa.

Suponha que o polinômio  $p(s) = c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n$ , ( $c_i \in R, c_0 \neq 0$ ) é estável. As propriedades dos polinômios  $d_{k,\gamma}(s)$  garantem que todas as raízes de  $d_{k,\gamma}(s)$  estão no semiplano à esquerda do eixo imaginário. Vimos como consequência da ideia-chave que, se algum  $r_{k,1}$  fosse nulo,  $p(s)$  teria ao menos uma raiz com parte real não negativa. Logo, todos os elementos da primeira coluna da tabela de Routh de  $p(s)$  são não nulos. Pela conservação da quantidade de raízes com parte real negativa, para cada  $k$ , o fator

$$1 + q_k(s) = \frac{r_{k+1,1}s + r_{k,1}}{r_{k+1,1}}$$

terá uma raiz negativa. Logo,  $r_{k,1}$  e  $r_{k+1,1}$  têm o mesmo sinal para todo  $k$ .

Reciprocamente, suponha que os  $n + 1$  elementos da primeira coluna da tabela de Routh do polinômio  $p(s)$  são diferentes de zero e têm o mesmo sinal. Temos que  $p_{n-1}(s) + p_n(s)$  e

$$(1 + q_{n-1}(s))(p_n(s) + p_{n+1}(s)) = \left( \frac{r_{n,1}s + r_{n-1,1}}{r_{n,1}} \right) (r_{n,1}s + r_{n+1,1})$$

têm a mesma quantidade de raízes com parte real negativa. Como os elementos  $r_{k,1}$  têm o mesmo sinal, vemos que todas as raízes de  $p_{n-1}(s) + p_n(s)$  têm parte real negativa. Repetindo o argumento, temos que  $p_{n-2}(s) + p_{n-1}(s)$  e

$$(1 + q_{n-2}(s))(p_{n-1}(s) + p_n(s))$$

têm a mesma quantidade de raízes com parte real negativa. Como os  $r_{k,1}$  têm o mesmo sinal, o polinômio

$$1 + q_{n-2}(s) = \frac{r_{n-1,1}s + r_{n-2,1}}{r_{n-1,1}}$$

tem uma raiz real negativa. Logo, todas as raízes de  $p_{n-2}(s) + p_{n-1}(s)$  têm parte real negativa. Repetindo o argumento até voltar a  $p(s)$ , concluímos que todas as raízes de  $p(s)$  têm parte real negativa, e que  $p$  é estável. ■