Resultados de Aproximação de Hamiltonicidade em Grafos Kneser

Approximative Results of Hamiltonicity in Kneser Graphs

Felipe de Campos Mesquita, felipe.mesquita@aluno.ufabc.edu.br
Rodrigo de Alencar Hausen, hausen@compscinet.org
Letícia Rodrigues Bueno, leticia.bueno@ufabc.edu.br
Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, SP

Submetido em 13/09/2015

Revisado em 15/10/2015

Aprovado em 01/03/2016

Resumo: O grafo Kneser $K(n,k)$ é o grafo cujos vértices são os subconjuntos com k elementos de um conjunto $\{1, \dots, n\}$ e dois vértices são unidos por uma aresta se o par correspondente subconjuntos é disjunto. Uma conjectura de Biggs afirma que $O_k = K(2k+1, k)$ é hamiltoniano para $k > 2$ e uma conjectura de Lovász implica que todo grafo Kneser conexo tem um caminho hamiltoniano. Neste trabalho, mostramos que o prisma sobre todo grafo Kneser conexo e sobre seu grafo bipartido duplo é hamiltoniano.

Palavras chaves: Ciclo Hamiltoniano. Grafo Kneser.

Abstract: The Kneser graph $K(n,k)$ is the graph whose vertices are the subsets with k elements of a set $\{1, \dots, n\}$ and two vertices are joined by an edge if the corresponding pair of k -subsets is disjoint. A conjecture due to Biggs claims that $O_k = K(2k+1, k)$ is hamiltonian for $k > 2$ e a conjecture due to Lovász implies that every connected Kneser graph has a hamiltonian path. In this paper, we show that the prism over all connected Kneser graphs and over their bipartite double graphs is hamiltonian.

Keywords: Hamiltonian cycle. Kneser graph.

Introdução

Em 1856, Hamilton propôs um problema modelado por grafos que viria a ser um dos mais importantes e estudados na área de Teoria dos Grafos (HAMILTON, 1856). O problema consiste na busca por um ciclo que passa por todo vértice do grafo exatamente uma vez e volta ao vértice de origem e é conhecido como o *Problema do Ciclo Hamiltoniano*. O problema tem várias aplicações práticas como, por exemplo, no projeto de circuitos impressos. Imagine uma placa de circuito impresso que necessita ter inúmeros furos para encaixe de seus componentes e um braço eletrônico para perfurar a placa. É necessário determinar a ordem de perfuração da placa. Com apenas um braço eletrônico, a ordem de perfuração da placa pode ser modelada como o problema do ciclo hamiltoniano, representando os furos e a posição inicial do braço eletrônico como vértices. A dificuldade do problema é demonstrada no fato de que já foi provado que determinar se um grafo G tem um ciclo hamiltoniano é um problema NP-completo (KARP, 1972).

Uma variação do problema conhecida como o *Problema do Caminho Hamiltoniano*, busca um caminho que passa por todos os vértices exatamente uma vez, porém não retorna ao vértice de origem. Similarmente, determinar se um grafo G tem um caminho hamiltoniano também já foi provado ser um problema NP-completo (GAREY & JOHNSON, 1979).

Os vértices do *grafo Kneser* $K(n,k)$ são os subconjuntos de tamanho k tomados do conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ e dois vértices são adjacentes se dois desses subconjuntos são disjuntos. Para $n=2k+1$, o grafo Kneser $K(2k+1,k)$ é conhecido como o *grafo ímpar* (“*odd graph*”, em inglês), denotado por O_k .

O grafo bipartido duplo (“*bipartite double graph*”, em inglês) do grafo Kneser $K(n,k)$ é conhecido como o *grafo Kneser bipartido*, denotado por $B(n,k)$. No grafo $B(n,k)$ os vértices são todos os subconjuntos de tamanho k e de tamanho $(n-k)$ tomados de $\{1,2,\dots,n\}$. As arestas representam a inclusão entre dois desses subconjuntos. Em particular, o grafo $B(2k+1,k)$ é conhecido como o *grafo de camadas intermediárias* (“*middle-levels graph*”, em inglês) e é denotado por B_k .

Lovász conjecturou que todo grafo conexo não-direcionado vértice-transitivo tem um caminho hamiltoniano (LOVÁSZ, 1970). Para $n>2k$, os grafos Kneser e os grafos Kneser bipartidos formam uma família infinita de grafos conexos vértice-transitivos. Biggs (BIGGS,

1979) conjecturou que os grafos ímpares são hamiltonianos para todo $k > 2$. Uma conjectura relacionada afirma que B_k é hamiltoniano (HAVEL, 1983).

Depois de mais de 30 anos, a conjectura de Havel foi recentemente provada (MÜTZE, 2014) e, posteriormente, estendida para todos os grafos Kneser bipartidos conexos (MÜTZE & SU, 2015). Até o momento, a conjectura de Biggs foi verificada para O_k no intervalo $3 \leq k \leq 13$ (SHIELDS & SAVAGE, 2004) e caminhos hamiltonianos foram encontrados em O_k para $k \leq 19$ (BUENO et al., 2009; SHIMADA & AMANO, 2011).

Com exceção do grafo O_2 que é o grafo de Petersen, um grafo bem conhecido por não ser hamiltoniano, o grafo $K(n,k)$ já foi encontrado ser hamiltoniano para $n \leq 27$ (SHIELDS & SAVAGE, 2004) e para $n \geq 2.62k+1$ (CHEN, 2003). Foi demonstrado como construir ciclos hamiltonianos em $K(2k+x,k)$ para $k \leq 2l+1$ usando ciclos hamiltonianos de $K(2k+x/2,k)$ para $k \leq l$ (JOHNSON, 2011). Entre outras implicações, temos que $K(2k+2,k)$ é hamiltoniano para $k \leq 27$ e, conseqüentemente, $K(2k+4,k)$ é hamiltoniano para $k \leq 55$, já que O_k é hamiltoniano para $k \leq 13$.

Devido à dificuldade de decidir se um grafo tem um ciclo hamiltoniano, uma tendência recente é a busca por ciclos longos. Johnson (JOHNSON, 2004) forneceu um limite inferior ao mostrar que O_k contém um ciclo de comprimento $(1-o(1))|V(O_k)|$, onde o termo de erro $o(1)$ é da forma $c/\sqrt{k}$ para alguma constante c . O autor não estima c mas, em outras palavras, isso significa que os grafos O_k são assintoticamente hamiltonianos porque, conforme k aumenta, o comprimento do ciclo também aumenta.

Outra tendência tem sido a busca por estruturas relacionadas. Neste aspecto, a existência de um prisma hamiltoniano para um grafo é uma relaxação interessante de ser hamiltoniano (KAISER et al., 2007). O *prisma sobre um grafo* G é o produto Cartesiano $G \times K_2$ de G com o grafo completo em dois vértices.

Um grafo G é *prisma-hamiltoniano* se $G \times K_2$ é hamiltoniano. Entretanto, determinar se o prisma sobre um grafo é hamiltoniano também é um problema NP-Completo (FLEISCHNER, 1988).

Foi estabelecido que o prisma sobre B_k é hamiltoniano (HORÁK et al., 2005). Mais tarde, foi provado que o prisma sobre O_k é hamiltoniano, mas somente para k par (BUENO & HORÁK, 2011). Neste trabalho, demonstramos que o prisma sobre os grafos conexos $K(n,k)$ e $B(n,k)$ é hamiltoniano para todo k .

Na próxima seção apresentamos as definições e proposições sobre as quais nossos resultados são baseados. Na sequência provamos a prisma-hamiltonicidade dos grafos Kneser e estendemos esse resultado para os grafos Kneser bipartidos, relacionando assim a prisma-hamiltonicidade de $K(n,k)$ e $B(n,k)$.

Preliminares

Nessa seção, introduzimos algumas notações, noções e resultados auxiliares, que serão frequentemente utilizados ao longo deste trabalho. Necessitamos de duas definições encontradas em (ČADA et al., 2004): um *cacto gerador* em um grafo G é um subgrafo gerador conexo H de grau máximo 3 consistindo somente de ciclos e caminhos, nos quais toda aresta pertence ou a um caminho ou a um ciclo. Se todo ciclo em um cacto é substituído por um vértice conectado aos caminhos incidentes ao ciclo, o grafo resultante será uma árvore. Um cacto é *par* se cada um dos seus ciclos é par.

Proposição 1 [ČADA et al., 2004]. Se G contém um cacto par gerador, então G é prisma-hamiltoniano.

A ideia principal de nosso resultado é mostrar que $K(n,k)$ contém um cacto par gerador para $n > 2k$. Tal cacto par gerador consiste de um ciclo par e caminhos de comprimento 1 ou 2.

Há uma correspondência entre os subconjuntos de tamanho k e $(n-k)$ de $\{1,2,\dots,n\}$ com um conjunto de strings binárias de n bits com exatamente k 1's e $(n-k)$ 0's. O mapeamento de $b_n b_{n-1} \dots b_1$ para $\{i | b_i = 1\}$ é uma bijeção de strings binárias de n bits em subconjuntos de n . Dado um dígito binário x , seu *complemento* é denotado por $\bar{x}$, e $\bar{\bar{x}} = x$ se $x=0$ ou $\bar{x} = 0$, caso contrário. O complemento de uma string binária é seu complemento bit a bit. Ao longo deste trabalho, consideraremos os vértices de $K(n,k)$ representados por strings binárias, exceto quando observado o contrário.

Dado um inteiro $x > 0$, considere os grafos Kneser e grafos Kneser bipartidos $K(n=2k+x,k)$ e $B(n=2k+x,k)$. A Definição 2 e o Lema 3 mostram como construir um ou dois ciclos em $K(n,k)$ a partir de um ciclo em $K(n-2,k-1)$.

Definição 2. Seja $C = (v_1, v_2, \dots, v_q)$ um ciclo em $K(n-2,k-1)$. Definimos as sequências C_1 e C_2 como segue:

- (i) $C_1 = (0v_11, 1v_20, \dots, 1v_q0)$ e $C_2 = (1v_10, 0v_21, \dots, 0v_q1)$, se q é par;
 (ii) $C_1 = (0v_11, 1v_20, \dots, 0v_q1)$ e $C_2 = (1v_10, 0v_21, \dots, 1v_q0)$, se q é ímpar.

Dados dois caminhos disjuntos Q_1 e Q_2 tal que o último vértice de Q_1 é adjacente ao primeiro vértice de Q_2 , denotamos por $Q_1 \circ Q_2$ o caminho obtido por primeiro atravessar os vértices de Q_1 e então os vértices de Q_2 .

Lema 3. Seja C um ciclo com q vértices em $K(n-2, k-1)$.

- (i) Se q é ímpar então existe um ciclo com $2q$ vértices em $K(n, k)$;
 (ii) Se q é par então existem dois ciclos disjuntos, cada um com q vértices em $K(n, k)$.

Demonstração. Ao adicionar 1 e 0 a um vértice de C , temos por definição um vértice de $K(n, k)$. Portanto, construa os caminhos C_1 e C_2 em $K(n, k)$ conforme a Definição 2. Observe, por construção, que C_1 e C_2 são caminhos em $K(n, k)$ e, se q é par, ambos são também ciclos. Se q é ímpar, uma vez que C é um ciclo, então existem arestas $\{0v_11, 1v_q0\}$ e $\{1v_10, 0v_q1\}$ em $E(K(n, k))$, o que implica que $C_1 \circ C_2$ é um ciclo em $K(n, k)$. ■

Definição 4. Sejam S_k , T_k e R_k três conjuntos disjuntos dos vértices de $K(n, k)$ tais que:

- (i) S_k é o conjunto dos subconjuntos de tamanho k que tem o elemento 1 ou n , mas não ambos;
 (ii) T_k é o conjunto dos subconjuntos de tamanho k que não tem o elemento 1 nem o elemento n ;
 (iii) R_k é o conjunto dos subconjuntos de tamanho k que tem ambos os elementos 1 e n .

Observe que $V(K(n, k)) = S_k \cup T_k \cup R_k$. Por definição, vértices em S_k não tem arestas para vértices em R_k . Também, vértices em R_k são adjacentes somente a vértices em T_k e, portanto, $K(n, k)$ tem um subgrafo bipartido (T_k, R_k) induzido pelas arestas entre T_k e R_k .

Lema 5. Para $K(n=2k+1, k) = O_k$, cada vértice $v \in T_k$ tem exatamente duas arestas para vértices em S_k e $(k-1)$ arestas para vértices em R_k .

Demonstração. Uma vez que um subconjunto de tamanho k em T_k não contém nem 1 nem n , existem $(2k-1)$ elementos para escolher k elementos. Portanto, não existem arestas entre

quaisquer dois vértices em T_k . Entretanto, de $(2k-1)$ elementos podemos escolher um subconjunto u de tamanho k e um subconjunto v de tamanho $(k-1)$. Observe que $u \in T_k$ é adjacente a $v \cup \{1\} \in S_k$ e é adjacente a $v \cup \{n\} \in S_k$. Os vértices de R_k adjacentes a u são definidos adicionando-se 1 e n a v e removendo um dos $(k-1)$ elementos de v a cada vez.

■

Lema 6. Para O_k , é verdade que $|T_k|=|V(O_{k-1})|$.

Demonstração. Uma vez que $|T_k| = \binom{2k-1}{k} = \binom{2k-1}{(2k-1)-k} = \binom{2k-1}{k-1}$, segue que $|T_k| = |V(O_{k-1})|$. ■

Lema 7. É verdade que $|T_k| - |R_k| \geq 2$.

Demonstração. Uma vez que $n \geq 2k+1$, temos que

$$\begin{aligned} |T_k| - |R_k| &= \frac{(n-2)!}{(n-2-k)!k!} - \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} \\ |T_k| - |R_k| &= \frac{n-2k}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ |T_k| - |R_k| &\geq \frac{n-2k}{k} \binom{n-1}{1} = \frac{(n-2k)(n-1)}{k} \\ |T_k| - |R_k| &\geq \frac{(2k+1-2k)(2k+1-1)}{k} = \frac{2k}{k} = 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 8. Para $K(n=2k+x, k)$ e $k > x-1$, é verdade que $|S_k| > |T_k|$.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} |S_k| &= 2 \binom{n-2}{k-1} = 2 \frac{(n-2)!}{(k-1)(n-k-1)(k-2)!(n-k-2)!} \\ |S_k| &= \frac{2k}{n-k-1} |T_k| = \frac{2k}{k+x-1} |T_k| \end{aligned}$$

Para $k > x-1$, temos $\frac{2k}{k+x-1} > 1$. ■

A seguir, provamos algumas propriedades em alguns subgrafos bipartidos de $K(n, k)$. Seja H_1 o subgrafo bipartido (S_k, T_k) induzido pelas arestas entre S_k e T_k . Seja $d_{H_1}(S_k)$ o grau dos vértices de S_k em H_1 e $d_{H_1}(T_k)$ o grau dos vértices de T_k em H_1 .

Lema 9. Para $K(n=2k+x, k)$ e $k > x-1$, é verdade que $d_{H_1}(S_k) < d_{H_1}(T_k)$.

Demonstração. Observe que

$$d_{H_1}(T_k) = 2 \binom{n-k-2}{k-1} = 2 \frac{(n-k-2)!}{(k-1)!(n-2k-1)!} e d_{H_1}(S_k) = \binom{n-k-1}{k} = \frac{(n-k-1)(n-k-2)!}{k(k-1)!(n-2k-1)!}$$

Portanto, $d_{H_1}(S_k) = \frac{n-k-1}{2k \cdot d_{H_1}(T_k)} = \frac{k+x-1}{2k \cdot d_{H_1}(T_k)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2k}\right) \cdot d_{H_1}(T_k)$.

Uma vez que $k > x-1$, temos que $\frac{x-1}{2k} < \frac{1}{2}$. ■

Seja H_2 o subgrafo bipartido (T_k, R_k) induzido pelas arestas entre T_k e R_k . Seja $d_{H_2}(T_k)$ o grau dos vértices de T_k em H_2 e $d_{H_2}(R_k)$ o grau dos vértices de R_k em H_2 .

Lema 10. Para $K(n=2k+x, k)$, é verdade que $d_{H_2}(R_k) > d_{H_2}(T_k)$.

Demonstração. Observe que

$$d_{H_2}(T_k) = \binom{n-k-2}{k-2} = \frac{(n-k-2)!}{(k-2)!(n-2k)!} e d_{H_2}(R_k) = \binom{n-k}{k} = \frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)!}{k(k-1)(k-2)!(n-2k)!}$$

Portanto,

$$d_{H_2}(R_k) = \frac{(n-k)(n-k-1)}{k(k-1)} d_{H_2}(T_k) = \frac{(k+x)(k+x-1)}{k(k-1)} d_{H_2}(T_k).$$

Uma vez que $x > 0$, temos que $\frac{(k+x)(k+x-1)}{k(k-1)} > 1$. ■

Lema 11. Se $C=(v_1, v_2, \dots, v_q)$ é um ciclo hamiltoniano em $K(n-2, k-1)$ e C_1 e C_2 são construídos de acordo com a Definição 2, então

- (i) $S_k = V(C_1) \cup V(C_2)$;
- (ii) $|S_k| = |C_1| + |C_2| = 2|V(K(n-2, k-1))|$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, seja $v \in S_k$ tal que $v=0v'1$ para $v' \in V(K(n-2, k-1))$. Então v' deve conter $(k-1)$ 1's, que podem ser colocados em $\binom{n-2}{k-1}$ posições possíveis na string que representa v' . Estas combinações correspondem aos vértices de $K(n-2, k-1)$. A prova é análoga para $v=1v'0$. Segue que, por construção de C_1 e C_2 e porque C é um ciclo hamiltoniano, cada vértice de S_k está ou em C_1 ou em C_2 . ■

Lema 12. Para $K(n = 2k+x, k)$ e $x > 1$, é verdade que $|C_1| < |T_k|$.

Demonstração. Pelo Lema 11,

$$|C_1| = |V(K(n-2, k-1))| = \binom{n-2}{k-1} = \frac{k}{n-k-1} |T_k|.$$

Para $x > 1$ e $n=2k+x$, temos $\frac{k}{k+x-1} < 1$. ■

Seja H_3 o subgrafo bipartido (C_1, T_k) induzido pelas arestas entre C_1 e T_k . Seja $d_{H_3}(C_1)$ o grau dos vértices de C_1 em H_3 e $d_{H_3}(T_k)$ o grau dos vértices de T_k em H_3 .

Lema 13. Para $K(n = 2k + x, k)$, é verdade que $d_{H_3}(C_1) > d_{H_3}(T_k)$.

Demonstração. Observe que

$$d_{H_3}(C_1) = \binom{n-k-1}{k} = \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k-1)!} = \frac{(n-k-1)(n-k-2)!}{k(k-1)!(n-2k-1)!}$$

$$d_{H_3}(T_k) = \binom{n-k-2}{k-1} = \frac{(n-k-2)!}{(k-1)!(n-2k-1)!}$$

Portanto, $d_{H_3}(C_1) = \frac{n-k-1}{k} d_{H_3}(T_k)$.

Para $x > 1$ e $n = 2k + x$, temos $\frac{n-k-1}{k} = \frac{k+x-1}{k} > 1$. ■

Usaremos um resultado que aparece como o Corolário 6.1.7 em (ASRATIAN *et al.*, 1998):

Proposição 14 [ASRATIAN *et al.*, 1998]. Todo grafo bipartido tem um emparelhamento máximo que cobre todos os vértices de grau máximo.

Teorema 15. Se existe um ciclo hamiltoniano $C = (v_1, v_2, \dots, v_q)$ em $K(n-2, k-1)$, então $K(n, k)$ tem um ciclo C' tal que $|C'| = 3|V(K(n-2, k-1))|$.

Demonstração. Construa C_1 e C_2 de acordo com a Definição 2. Denote por $\vec{w}$, um caminho w atravessado do último para o primeiro vértice. Para $n = 2k + 1$, observe que há exatamente q vértices $0\vec{v}_j0$ conectando $0v_j1$ a $1v_j0$, onde $0v_j1 \in S_k$, $1v_j0 \in S_k$ e $v_j \in C$ para $1 \leq j \leq q$, já que o complemento $0\vec{v}_j0$ de um vértice $v_j \in C$ tem k '1's e $(k-1)$ '0's. Portanto, $0\vec{v}_j0 \in V(O_k)$. Os q vértices $0\vec{v}_j0$, para $v_j \in C$, são distintos, porque C é um ciclo hamiltoniano em O_{k-1} e, portanto, o complemento dos vértices de C são também distintos e, pelo Lema 6, consistem de todos os vértices de T_k .

Para $n = 2k + x$ e $x > 1$, pelos Lemas 12 e 13 e Proposição 14, há um emparelhamento de T_k para os vértices de C_1 tal que cada vértice de C_1 é saturado. Observe que se um vértice de T_k é adjacente a um vértice em C_1 , ele é também adjacente ao vértice correspondente em C_2 . Construa q caminhos de três vértices combinando os vértices de C_1 , C_2 e T_k como segue:

$$w_1 = 0v_11,0\overline{v_1}0,1v_10$$

$$w_2 = 1v_20,0\overline{v_2}0,0v_21$$

$\vdots$

$$w_q = 1v_q0,0\overline{v_q}0,0v_q1, \text{ se } q \text{ é par ou}$$

$$w_q = 0v_q1,0\overline{v_q}0,1v_q0, \text{ se } q \text{ é ímpar.}$$

Observe que, para w_j , $1 \leq j \leq q$, o primeiro vértice de w_j está em C_1 , o segundo está em T_k e o terceiro está em C_2 . Concatene os q caminhos w_j , $1 \leq j \leq q$, como segue:

$$C' = w_1 \circ \overrightarrow{w_2} \circ w_3 \circ \overrightarrow{w_4} \circ \dots \circ \overrightarrow{w_q} \text{ se } q \text{ é par e } C' = w_1 \circ \overrightarrow{w_2} \circ w_3 \circ \overrightarrow{w_4} \circ \dots \circ w_q \text{ se } q \text{ é ímpar.}$$

Observe que, em ambos os casos, o último vértice de C' é $1v_q0$, que é adjacente ao primeiro vértice de C' , ou seja, a $0v_11$. Portanto, C' é um ciclo. ■

Grafos Kneser são Prisma-Hamiltonianos

Essa seção mostra como um cacto par gerador em $K(n,k)$ é obtido de um cacto par gerador em $K(n-2,k-1)$. Nossa prova constrói um cacto par gerador em $K(n,k)$ que é um ciclo par conectado a caminhos de comprimento 1 ou 2. Para construir o primeiro cacto par gerador, precisamos de um grafo Kneser hamiltoniano $K(n-2,k-1)$ tal que o número de vértices $|V(K(n-2,k-1))|$ é par. O Lema 16 mostra que, para cada n , existe um valor de k tal que $K(n,k)$ é hamiltoniano e o Lema 17 mostra que tal grafo tem um número par de vértices.

Lema 16. O grafo Kneser $K(n,k)$ é hamiltoniano para $k=x+1$ e $x \geq 2$.

Demonstração. Para $2 \leq x \leq 8$, foi provado que $K(n=2k+x,k)$ é hamiltoniano para $k=x+1$ (SHIELDS & SAVAGE, 2004). Além disso, $K(n \geq 2.62k+1,k)$ é hamiltoniano segundo (Chen, 2003). Observe que, para $x > 4$ e $k=x+1$, temos $2k+x \geq 2.62k+1$. ■

Lema 17. O grafo $K(n=2k+x,k=x+1)$ tem um número par de vértices.

Demonstração. Observe que, para $k=x+1$, o número de vértices de $K(2k+x,k)$ é: $\binom{3(x+1)-1}{x+1}$.

Temos que $\binom{a}{b}$ é divisível por um número primo p se, e somente se, pelo menos um dos dígitos de b na base p é maior que o dígito correspondente de a , de acordo com um conhecido corolário do Teorema de Lucas (LUCAS, 1878). Denotaremos por $(a_{m-1} \dots a_1 a_0)_p$

a representação de um inteiro a na base 2 com m dígitos. Seja $a = 3(x+1)-1$ e $b = x+1$. Uma vez que $x+1 > 0$, devemos ter que $b = x+1 = (b_{m-1}...b_x10...0)_2$ para $x \geq 1$.

Seja $3(x+1) = (c_{m+1}c_m c_{m-1}...c_1 c_0)_2 = (b_{m-1}...b_x10...0)_2 + (b_{m-1}...b_x10...00)_2$, o que significa que $3(x+1) = (c_{m+1}c_m c_{m-1}...c_x10...0)_2$. Para obter a representação de $a=3(x+1)-1$ na base dois, subtraia uma unidade de $(c_{m+1}c_m c_{m-1}...c_x10...0)_2$, obtendo como resultado o número $(c_{m+1}c_m c_{m-1}...c_x01...1)_2 = (a_{m+1}a_m a_{m-1}...a_x01...1)_2$. Observe que o x -ésimo dígito menos significativo de a é 0, em todo lugar em que o dígito correspondente em b é 1, o que implica que

$$\binom{a}{b} = \binom{3(x+1)-1}{x+1}$$

é divisível por 2. ■

Definimos dois tipos diferentes de cacto par gerador em $K(n,k)$.

Definição 18. Um *peio*te é um cacto par gerador de $K(n,k)$ tal que todos os vértices de S_k e T_k formam um ciclo par e cada vértice de R_k está conectado a esse ciclo por uma aresta.

Definição 19. Um *cactoide* é um cacto par gerador de $K(n,k)$ tal que todos os vértices de S_k e Y , onde $Y \subseteq T_k$, formam um ciclo par, todos os vértices de $T_k \setminus Y$ estão conectados a esse ciclo por uma aresta, e cada vértice de R_k está conectado por uma aresta a algum vértice de T_k .

Observe que valem: todo peioete é um cactoide tendo $Y=T_k$. Uma vez que o ciclo par em um cactoide somente tem vértices de S_k e T_k , cada vértice de $T_k \setminus Y$ está conectado ao ciclo por uma aresta a algum vértice de S_k . Os vértices de R_k estão conectados aos vértices de T_k .

Lema 20. Para $K(n=2k+x,k)$ e $k > x-1$, se existe um ciclo hamiltoniano $C=(v_1, \dots, v_q)$ em $K(n-2, k-1)$ tal que $|C|$ é par, então $K(n,k)$ tem um cactoide.

Demonstração. Construa um ciclo C' como dado na prova do Teorema 15. Uma vez que C' é formado pela concatenação de q caminhos, cada um com três vértices, e $|C|$ é par, então $|C'|$ é também par.

Primeiro considere $n=2k+1$. Pelos Lemas 6 e 11, temos $|T_k|=|S_k| \div 2=|C_1|=|C_2|$. Portanto, resta apenas conectar a C' os vértices de R_k . Lembre que os vértices de R_k são

adjacentes somente aos vértices de T_k . Pelos Lemas 7 e 10, e pela Proposição 14, existe um emparelhamento M entre os vértices de R_k e T_k de forma que todos os vértices de R_k são saturados. O emparelhamento M junto com o ciclo C' formam um peioite em O_k .

Agora, considere $K(n=2k+x, k)$ para $x \geq 2$. Pelo Lema 12, $|T_k| > |S_k| \div 2 = |C_1| = |C_2|$. Pelos Lemas 8 e 9, e pela Proposição 14, existe um emparelhamento M entre os vértices de T_k e S_k tal que cada vértice de T_k é saturado. Portanto, existe um emparelhamento $M' \subset M$ tal que todos os vértices de T_k em M' não foram usados para construir C' . Pelos Lemas 7 e 10 e pela Proposição 14, existe um emparelhamento M^* entre os vértices de R_k e T_k saturando todos os vértices de R_k . Os emparelhamentos M' e M^* junto com o ciclo C' formam um cactoide em $K(n, k)$. ■

Pelos Lemas 16 e 17, para $x \geq 2$ e $k = x + 1$, $K(n, k)$ é hamiltoniano e tem número par de vértices. Para $x = 1$, observe que O_k é hamiltoniano para $3 \leq k \leq 13$ (SHIELDS & SAVAGE, 2004) e que $|V(O_{13})|$ é par. O Lema 20 fornece um peioite em O_{14} e um cactoide em $K(n, k)$ para $x \geq 2$ e $k = x + 2$. O Teorema 21 implica um cactoide em O_k para $k \geq 15$ e em um cactoide em $K(n, k)$ para $x \geq 2$ e $k \geq x + 3$.

Teorema 21. Para $K(n=2k+x, k)$ e $k > x - 1$, se $K(n-2, k-1)$ tem um cactoide, então $K(n, k)$ também tem um cactoide.

Demonstração. Seja $C' = (v_1, \dots, v_q)$ o ciclo par de um cactoide W no grafo $K(n-2, k-1)$ construído conforme o Lema 20. Construa C_1' e C_2' de C' conforme a Definição 2. Para uma aresta $\{v_i, w\} \in E(W)$ tal que $w \notin C'$ e $v_i \in C'$, se $0v_i1$ está em C_1' então acrescente as arestas $(0v_i1, 1w0)$ e $(1v_i0, 0w1)$ a C_1' e C_2' , respectivamente. Caso contrário, acrescente as arestas $(0v_i1, 1w0)$ e $(1v_i0, 0w1)$ a C_2' e C_1' , respectivamente. Similarmente, se existe um caminho (v_i, u, w) em W tal que $u, w \notin C'$ e $v_i \in C'$ e se $0v_i1$ está em C_1' , então adicione os caminhos $(0v_i1, 1u0, 0w1)$ e $(1v_i0, 0u1, 1w0)$ a C_1' e C_2' , respectivamente. Caso contrário, adicione os caminhos $(0v_i1, 1u0, 0w1)$ e $(1v_i0, 0u1, 1w0)$ a C_2' e C_1' , respectivamente. Observe que todos os vértices em C_1' e C_2' são vértices de S_k . Seja F o conjunto formado pelos vértices de C_1' que tem: (a) grau 1, ou; (b) grau 2 e é um vértice no ciclo.

Para $n = 2k + 1$, os vértices $1v_i0$ e $0v_i1$ são adjacentes somente a um vértice em T_k : $0\bar{v}_i0$ (Lema 5). Portanto, há um único emparelhamento M entre os vértices de T_k e F . Para $n > 2k + 1$, pelos Lemas 12 e 13 e pela Proposição 14, existe um emparelhamento M entre os

vértices de T_k e F que satura cada vértice de F . Uma vez que cada vértice de T_k adjacente a um vértice $0v_i1$ é também adjacente a $1v_i0$, como no Teorema 15, construa q caminhos combinando os vértices de C_1' , C_2' e $M \subseteq (F, T_k)$:

(i) Se um vértice $v_i \in C'$ tem grau 2 em W , então v_i pode estar em S_k ou T_k . Então $(0v_i1, z, 1v_i0)$ é um caminho de comprimento 3 em $K(n, k)$ onde $z \in T_k$ e é dado por M ;

(ii) Se um vértice v_i tem grau 3 e um caminho (v_i, w) em W com w de grau 1, então construa um caminho com cinco vértices: $(0v_i1, 1w0, z, 0w1, 1v_i0)$ onde $z \in T_k$ e é dado por M ;

(iii) Se um vértice v_i tem grau 3 e um caminho (v_i, u, w) em W , então construa um caminho com sete vértices: $(0v_i1, 1u0, 0w1, z, 1w0, 0u1, 1v_i0)$ onde $z \in T_k$ e é dado por M .

Combine os q caminhos em um ciclo C^* como no Teorema 15. Observe que, uma vez que cada caminho tem número ímpar de vértices e q é par, $|C^*|$ também é par. Resta adicionar a C^* os vértices de T_k que não estão no ciclo e todos os vértices de R_k .

Considere primeiro $n=2k+1$. Seja u um vértice de S_k que está em C^* tal que u contém o elemento 1 e u não é adjacente em C^* a qualquer vértice de T_k . Então adicione a C^* a aresta $\{u, w\}$ onde w é o único vértice de T_k adjacente a u (Lema 5). Pelos Lemas 7 e 10 e pela Proposição 14, existe um emparelhamento M entre os vértices de R_k e T_k de forma que todos os vértices de R_k são saturados. O emparelhamento M junto com o ciclo C^* formam um cactoide em O_k .

Agora considere $n=2k+x$ e $x \geq 2$. Pelo Lema 8, $|S_k| > |T_k|$. O ciclo C^* tem todos os vértices de S_k e parte dos vértices de T_k . Pelos Lemas 8 e 9 e pela Proposição 14, existe um emparelhamento M entre os vértices de T_k e S_k tal que cada vértice de T_k é saturado. Portanto, existe um emparelhamento $M' \subset M$ tal que todos os vértices de T_k em M' não foram usados para construir C^* . Pelos Lemas 7 e 10 e pela Proposição 14, existe um emparelhamento M^* entre os vértices de R_k e T_k saturando todos os vértices de R_k . Os emparelhamentos M' e M^* junto com o ciclo C^* formam um cactoide em $K(n, k)$. ■

Corolário 22. Para $x \geq 1$ e $n = 2k+x$, o prisma sobre o grafo Kneser $K(n, k)$ é hamiltoniano.

Demonstração. O grafo O_2 tem um caminho hamiltoniano e, portanto, é prisma-hamiltoniano. Para $k=1$ e $3 \leq k \leq 13$, O_k é hamiltoniano (SHIELDS & SAVAGE, 2004) e

$|V(O_{13})|$ é par. Para $x \geq 2$, $K(n, k \leq x+1)$ é hamiltoniano (CHEN, 2003; SHIELDS & SAVAGE, 2004) e, para $k=x+1$, tem um número par de vértices (Lemas 16 e 17). O Lema 20 fornece um peiole em O_{14} e um cactoide em $K(n, k)$ para $x \geq 2$ e $k=x+2$. Pelo Teorema 21, existe um cactoide em O_k para $k \geq 15$ e um cactoide em $K(n, k)$ para $x \geq 2$ e $k \geq x+3$. Portanto, pela Proposição 1, o grafo $K(n, k)$ é prisma-hamiltoniano quando $n > 2k$. ■

Grafos Kneser Bipartidos são Prisma-Hamiltonianos

Foi provado que o grafo B_k é prisma-hamiltoniano (Horák et al., 2005) determinando-se um subgrafo gerador 3-regular 3-conexo em B_k . Um resultado em (Paulraja, 1993) implica que grafos com tal subgrafo gerador são prisma-hamiltonianos. Fornecemos uma prova alternativa para o mesmo resultado e a estendemos para todos os grafos $B(n, k)$ conexos, relacionando um cactoide em $K(n, k)$ com um cacto par gerador em $B(n, k)$. A Proposição 23 é um corolário de um resultado provado em (JOHNSON, 2004) para O_k e B_k .

Proposição 23. Seja C um ciclo com q vértices em $K(n, k)$.

- (i) Se q é ímpar, então existe um ciclo em $B(n, k)$ com $2q$ vértices.
- (ii) Se q é par, então existem dois ciclos disjuntos em $B(n, k)$ cada um com q vértices.

Observe que $|V(B(2k+x, k))| = \binom{2k+x}{k} + \binom{2k+x}{k+x} = 2|V(K(2k+x, k))|$.

Portanto, se C é um ciclo hamiltoniano em $K(n, k)$ tal que $|C|$ é ímpar, então a Proposição 23 fornece um ciclo hamiltoniano em $B(n, k)$. Caso contrário, se $|C|$ é par, então os dois ciclos disjuntos contêm todos os vértices de $B(n, k)$.

Os Lemas 24 e 25 provam a existência de um ciclo ímpar em O_k e em $K(2k+2, k)$, respectivamente. Em ambas as provas não usaremos a representação dos vértices como strings binárias.

Lema 24. O grafo O_k tem um ciclo com $n = 2k+1$ vértices tal que $(n-1)$ vértices estão em S_k e um vértice está em T_k .

Demonstração. Considere um subconjunto de tamanho k : $\sigma = \{2, 4, \dots, n-1=2k\} \in V(O_k)$. Denote $\sigma + \delta$ como o conjunto $\{(a + \delta) \bmod n : a \in \sigma\}$. A sequência $C_\sigma = (\sigma, \sigma+1, \sigma+2, \dots, \sigma+(n-$

1)) é um ciclo com n vértices (BUENO et al., 2009). Observe que não há elementos consecutivos em σ . Portanto, σ está em T_k e os outros vértices contêm 1 ou n . ■

Lema 25. O grafo $K(2k+2,k)$ tem um ciclo de comprimento $(2k-1)$ tal que cada vértice do ciclo está ou em T_k ou em R_k .

Demonstração. Considere os conjuntos $A=\{2,3,\dots,k-1\}$ e $B=\{k, k+1,\dots,2k-1\}$. Seja $A_1 = 2, A_2 = 3,\dots, A_{k-2} = k-1$ e $B_1 = k, B_2 = k+1,\dots, B_k = 2k-1$. Construa um ciclo $Z=(z_1,\dots,z_j)$:

$$\begin{aligned} z_1 &= A \cup \{1,n\}, \\ z_2 &= B, \\ z_3 &= (A \setminus \{A_1\}) \cup \{1,2k,n\}, \\ z_4 &= (B \setminus \{B_1\}) \cup \{A_1\}, \\ z_5 &= (A \setminus \{A_1,A_2\}) \cup \{1,B_1,2k,n\}, \\ z_6 &= (B \setminus \{B_1,B_2\}) \cup \{A_1,A_2\}, \\ &\vdots \\ z_{j-2} &= (A \setminus \{A_1,\dots,A_{k-2}\}) \cup \{1,B_1,\dots,B_{k-1},2k,n\} = \{1,B_1,\dots,B_{k-1},2k,n\}, \\ z_{j-1} &= (B \setminus \{B_1,\dots,B_{k-2}\}) \cup \{A_1,\dots,A_{k-2}\}, \\ z_j &= v_1 \cap v_{j-1} = \{B_1,\dots,B_{k-2}\} \cup \{2k,2k+1\}. \end{aligned}$$

Observe que Z é um ciclo e que há $(2k-4)$ vértices no caminho parcial $(z_3,\dots,z_{j-1})$. Portanto, $|Z|=2k-1$. Note ainda que $z_i \in T_k$ quando i é par ou se $i=j$. Para i ímpar, exceto para z_j , todo vértice está em R_k . ■

Teorema 26. Para $x \geq 1$, o prisma sobre o grafo Kneser bipartido $B(n,k)$ é hamiltoniano.

Demonstração. Observe que, se existe um ciclo hamiltoniano em $K(n,k)$ e $|V(K(n,k))|$ é ímpar, então $B(n,k)$ tem um ciclo hamiltoniano. Se $|V(K(n,k))|$ é par, então $B(n,k)$ tem dois ciclos contendo todos os vértices que formam um peioite, uma vez que $B(n,k)$ é conexo. Como o único grafo Kneser conexo não-hamiltoniano conhecido, O_2 tem dois ciclos contendo todos seus vértices, o que resulta em um peioite. Portanto, assumimos $k \geq x+1$.

Seja $C(W)=(w_1,w_2,\dots,w_q)$ o ciclo par de um cactoide W em $K(n,k)$ construído de acordo com o Lema 20 ou o Teorema 21. Sejam W_1 e W_2 duas cópias de W . Construa dois cactoides em $B(n,k)$ modificando W_1 e W_2 como segue:

(i) $C(W_1) = (w_1, \overline{w_2}, \dots, w_{q-1}, \overline{w_q})$ é o ciclo par em W_1 .

(ii) $C(W_2) = (\overline{w_1}, w_2, \dots, \overline{w_{q-1}}, w_q)$ é o ciclo par em W_2 .

(iii) Para cada aresta $\{u, w_i\} \in E(W)$ tal que $u \notin C(W)$ e $w_i \in C(W)$, se w_i está em W_1 , então $\{\overline{u}, w_i\} \in E(W_1)$ e $\{u, \overline{w_i}\} \in E(W_2)$. Caso contrário, se w_i está em W_2 , então $\{\overline{u}, w_i\} \in E(W_2)$ e $\{u, \overline{w_i}\} \in E(W_1)$. Similarmente, considere uma aresta $\{u, z\} \in E(W)$ tal que $\{u, z\} \notin E(C(W))$. Se u está em W_1 , então $\{\overline{z}, u\} \in E(W_1)$ e $\{z, \overline{u}\} \in E(W_2)$. Caso contrário, se u está em W_2 , então $\{\overline{z}, u\} \in E(W_2)$ e $\{z, \overline{u}\} \in E(W_1)$.

Observe que cada vértice de $B(n, k)$ está em W_1 ou em W_2 . Resta mostrar como conectar apropriadamente W_1 a W_2 por uma aresta a fim de obter um cacto par gerador em $B(n, k)$.

Para $x \geq 3$, observe que o subgrafo induzido formado pelos vértices de T_k é isomorfo a $K(n-2, k)$ que é conexo e, conseqüentemente, $B(n-2, k)$ também é conexo. Portanto, existe uma aresta $e = \{u, v\}$ com $u, v \in T_k$ tal que as arestas $e' = \{u, \overline{v}\}$ e $e'' = \{\overline{u}, v\}$ conectam W_1 a W_2 . Suponha que nem e' nem e'' possam ser usadas para formar um cactoide em $B(n, k)$. Então u ou v (ou ambos) satisfazem uma das seguintes condições: (i) o vértice está no ciclo $C(W_i)$ e tem grau 3 em W_i , ou; (ii) o vértice não está no ciclo $C(W_i)$ e tem grau 2 em W_i .

Pelos Lemas 7 e 10 e pela Proposição 14, existe um emparelhamento dos vértices de R_k para os vértices de $T_k \setminus \{u, v\}$ que pode ser usado para conectar os vértices de R_k ao cactoide em $K(n, k)$ no Lema 20 e no Teorema 21.

Se $x=2$ então existe um ciclo $Z = (z_1, \dots, z_j)$ tal que $j=2k-1$ (Lema 25) e, pela Proposição 23, $B(n, k)$ tem um ciclo $Z' = (z_1, \overline{z_2}, \dots, z_j, \overline{z_1}, z_2, \dots, z_{2j=4k-2})$. Observe que cada vértice $z_i \in Z'$ também tem seu complemento $\overline{z_i}$ em Z' . Uma vez que cada vértice em W_1 tem seu complemento em W_2 há, pelo menos, duas arestas e_1 e e_2 em Z' que conectam W_1 a W_2 . Por construção, e_1 e e_2 conectam dois vértices de T_k ou conectam um vértice de T_k a um vértice de R_k . Como no caso anterior, um ou dois vértices de T_k podem ser removidos antes de escolher um emparelhamento de (T_k, R_k) no Lema 20 e no Teorema 21.

Para $x=1$, seja v um vértice em C_σ (Lema 24). Uma vez que $|C_\sigma|$ é ímpar, pela Proposição 23, existe um ciclo com $2n$ vértices em B_k , que contém ambos v e $\overline{v}$, para todo $v \in C_\sigma$. Portanto, existe uma aresta $e = \{u, v\}$ em C_σ tal que as arestas $e' = \{u, \overline{v}\}$ e $e'' =$

$\{\bar{u}, v\}$ conectam W_1 a W_2 . Pelo Lema 24, $(n-1)$ vértices de C_σ são de S_k e um vértice pertence a T_k .

Suponha que $u, v \in S_k$. Se ambos os vértices tem grau 2, então conecte W_1 a W_2 com $\{u, \bar{v}\}$ ou $\{\bar{u}, v\}$. Caso contrário, se u (ou v) tem grau 3, então está conectado a um vértice $w \in T_k$. Pelo Lema 5, w é adjacente a exatamente dois vértices u e u' em S_k e cada vértice de S_k é adjacente a exatamente um vértice em T_k . Portanto, a aresta $\{u, w\}$ pode ser substituída pela aresta $\{u', w\}$ em W de forma que ou e' ou e'' podem conectar W_1 a W_2 . Agora, suponha $u \in S_k$ e $v \in T_k$. Se u tem grau 3, então proceda como no caso anterior. Suponha que v é adjacente em W a um vértice de R_k . Novamente, o vértice v pode ser removido antes de escolher um emparelhamento de (T_k, R_k) no Lema 20 e no Teorema 21.

■

Agradecimentos

O primeiro autor gostaria de agradecer a Universidade Federal do ABC e a agência brasileira CNPq pelo suporte financeiro. Essa pesquisa foi apoiada pelo CNPq Universal 14/2013 (proc. 478778/2013-9).

Referências

- ASRATIAN, A.S.; DENLEY, T.M.J.; HÄGGKVIST, R. **Bipartite graphs and their applications**. Cambridge Tracts in Mathematics, v. 131, Cambridge University Press, 1998.
- BABAI, L. **Long cycles in vertex-transitive graphs**. Journal of Graph Theory, v. 3, n. 3, p. 301-304, 1979.
- BUENO, L.R.; FARIA, L.; FIGUEIREDO, C.M.H.; FONSECA, G.D. **Hamiltonian paths in odd graphs**, Applicable Analysis and Discrete Mathematics., v. 3, n. 2, p. 386-394, 2009.
- BUENO, L.R.; HORÁK, P. **On hamiltonian cycles in the prism over the odd graphs**, Journal of Graph Theory, v. 68, n. 3, p. 177-188, 2011.
- ČADA, R.; KAISER, T.; ROSENFELD, M.; RYJÁČEK, Z. **Hamiltonian decompositions of prisms over cubic graphs**, Discrete Mathematics, v. 286, n. 1-2, p. 45-56, 2004.
- CHEN, Y.-C. **Triangle-free hamiltonian Kneser graphs**, Journal of Combinatorial Theory Series B, v. 89, n. 1, p. 1-16, 2003.

FLEISCHNER, H. **The prism of a 2-connected, planar, cubic graph is hamiltonian (a proof independent of the four colour theorem)**, Graph theory in memory of G.A. Dirac, p. 141-170, 1988.

GAREY, M.R.; JOHNSON, D.S. **Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness**. W.H. Freeman and Company, New York, 1979.

HAMILTON, W.R. **Letter to John T. Graves on the Icosian, 17 oct., 1856**. In: Halberstam, H. e Ingram, R. E. (org). The Mathematical Papers of Sir William Rowan HAMILTON. New York: Cambridge University Press, v. 3 (Algebra), 1931, p. 612-625.

HAVEL, I. **Semipaths in directed cubes**. Graphs and other combinatorial topics, p. 101-108, 1983.

HORÁK, P.; KAISER, T.; ROSENFELD, M.; RYJÁČEK, Z. **The prism over the middle-levels graph is hamiltonian**. Order, v. 22, n. 1, p. 73-81, 2005.

JOHNSON, J.R. **Long cycles in the middle two layers of the discrete cube**, Journal of Combinatorial Theory Series A, v. 105, n. 2, p. 255-271, 2004.

JOHNSON, J.R. **An inductive construction for Hamilton cycles in Kneser graphs**. The Electronic Journal of Combinatorics, v. 18, n. 1, 2011.

KAISER, T.; RYJÁČEK, Z.; KRÁL, D.; ROSENFELD, M.; VOSS, H.-J. **Hamilton cycles in prisms**. Journal of Graph Theory, v. 56, n. 4, p. 249-269, 2007.

KARP, R.M. **Reducibility among combinatorial problems**. In: Miller, R.E. e Thatcher, J.W. (org). Complexity of Computer Computations. Plenum Press, 1972, p. 85-103.

LOVÁSZ, L. **Problem 11, Combinatorial structures and their applications**. 1970.

LUCAS, E. **Théorie des fonctions numériques simplement périodiques**. American Journal of Mathematics, v. 1, n. 2, p. 184-196, 1878.

MÜTZE, T. **Proof of the middle levels conjecture**. ArXiv e-prints, disponível em 1404.4442, 2014.

MÜTZE, T.; SU, P. **Bipartite Kneser graphs are hamiltonian**. ArXiv e-prints, disponível em 1503.09175, 2015.

PAULRAJA, P. **A characterization of hamiltonian prisms**. Journal of Graph Theory, v. 17, n. 2, p. 161-171, 1993.

SHIELDS, I.; SAVAGE, C.D. **A note on Hamilton cycles in Kneser graphs**. Bulletin of the Institute for Combinatorics and Its Applications, v. 40, p. 13-22, 2004.

SHIMADA, M.; AMANO, K. **A note on the middle levels conjecture**. CoRR abs/0912.4564, 2011.