

Teoria de Campos a partir do Movimento Browniano

Field Theory From Brownian Motion

Marcelo Santos Honório, marcelo.honorio@ufabc.edu.br

Ricardo Rocamora Paszko

Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo

Submetido em 15/02/2016

Revisado em 16/02/2016

Aprovado em 28/02/2016

Resumo: Por meio de análise combinatória do movimento aleatório de uma partícula sem spin num retículo d-dimensional discreto e uniforme do espaço (-tempo), ou seja, através de seu movimento browniano, encontramos a probabilidade de localizá-la em um ponto qualquer da rede. Ao ser tomado o limite do contínuo, ou seja, fazendo a distância entre os sítios e o intervalo de tempo entre cada passo irem a zero, chegamos ao propagador da partícula (função de Green) para uma, duas, três e quatro dimensões. Para chegarmos a estes resultados, contudo, fez-se necessário o estudo prévio de métodos matemáticos de resolução de equações diferenciais ordinárias como a Transformada de Fourier e as funções de Green, sendo cada uma ilustrada por exemplos já bem conhecidos e de vasta aplicação na Física, como o oscilador harmônico, além da equação de Klein-Gordon e de seus propagadores obtidos no caso não-homogêneo como introdução à Teoria de Campos.

Palavras chave: Movimento browniano. Análise combinatória. Tabuleiro de Feynman.

Abstract: By means of combinatorial analysis of the random motion of a particle without spin in a d-dimensional discrete and uniform lattice of space(-time), i.e., by means of its Brownian motion, we find the probability of locating it in any point on the lattice. When taking the continuum limit, i.e., making the distance between the sites and the time interval between each step go to zero, we get the particle propagator (Green function) for one, two, three and four dimensions. To obtain these results, however, it was necessary prior study of mathematical methods of solving ordinary differential equations such as Fourier Transform and Green functions, each one illustrated by well-known examples and of wide application in Physics such as the harmonic oscillator, as well the Klein- Gordon equation and its propagators obtained in the non- homogeneous case as an introduction to the Field Theory.

Keywords: Brownian Motion. Combinatorial Analysis. Feynman's Checkerboard.

Transformada de Fourier

De acordo com Butkov (1998), uma função $f(x)$ pode ser representada através de uma série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

o que a define através dos coeficientes a_n . Por outro lado, podemos representar a mesma função por uma série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x}$$

e agora o conjunto dos coeficientes c_n é que define a função.

Da mesma maneira, pode-se dizer que a função $F(k)$, conhecida como a transformada de Fourier da função $f(x)$, representa a função de acordo com a definição

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx, \quad (1)$$

sendo k uma variável real arbitrária.

Reciprocamente, $f(x)$ é a transformada de Fourier inversa de $F(k)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx} dk. \quad (2)$$

O oscilador harmônico amortecido forçado

Considere o caso do oscilador amortecido forçado, ou seja, sobre o qual atuam a força da mola $-kx$, a força resistiva $-b\dot{x}$ e uma força externa arbitrária $G(t)$. A segunda lei de Newton nos dá a equação de movimento

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = G(t)$$

e obtemos a seguinte fórmula quando a dividimos pela massa m :

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t), \quad (3)$$

com as definições da constante $\alpha = \frac{b}{2m}$, de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e de $F(t) = \frac{G(t)}{m}$.

Desde que $F(t)$ possua uma transformada de Fourier (BUTKOV, 1998), temos as seguintes equações:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.$$

Além disso, $x(t)$ também deve possuir uma transformada de Fourier, $A(\omega)$, de maneira que:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)e^{-i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Agora, aplicando a transformada na equação de movimento do oscilador (3) e usando $F\{\dot{x}\} = -i\omega F\{x\}$ e $F\{\ddot{x}\} = -\omega^2 F\{x\}$, podemos encontrar $A(\omega)$:

$$-\omega^2 A(\omega) - 2\alpha\omega i A(\omega) + \omega_0^2 A(\omega) = F(\omega)$$

$$A(\omega) = \frac{F(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega i}. \quad (5)$$

A solução será dada por

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega i} d\omega, \quad (6)$$

e a integral pode ser resolvida pela teoria de resíduos, por exemplo.

Os zeros do denominador $Z(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega i$ dão os polos do integrando. Se $\alpha > 0$, eles estão localizados no semi-plano inferior, no caso de $\omega_0 > \alpha$, em

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \alpha i.$$

Podemos escrever o denominador como $Z(\omega) = -(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$ e encontrar os resíduos. O resíduo em $\omega = \omega_1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\omega_1)e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2};$$

e em $\omega = \omega_2$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\omega_2)e^{-i\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Assuma, para um caso partícula, que $f(t)$ tem a forma:

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & |t| < \tau \\ 0, & |t| \geq \tau. \end{cases} \quad (7)$$

A transformada de $f(t)$ fica:

$$F(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{i\omega t} dt = f_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\omega\tau}{\omega}$$

e, portanto,

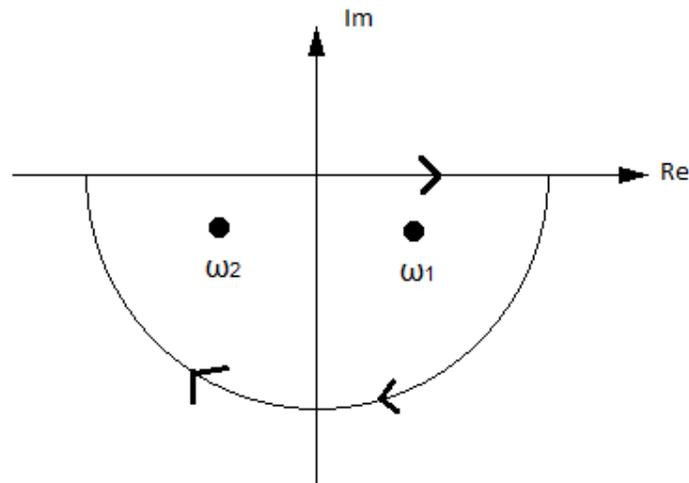
$$x(t) = -\frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t e^{-i\omega t}}{\omega(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

As singularidades do integrando estão em $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2$. Para $t > \tau$,

$$\frac{\sin \omega \tau e^{-i\omega t}}{\omega}$$

é limitada no semiplano inferior e o contorno é feito pelos quadrantes inferiores, como mostra a figura 1:

Figura 1– contorno de integração feito “por baixo”, no sentido horário.



Fonte: produção do autor.

Ficamos com

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{f_0}{\pi} 2\pi i \left[\frac{\sin(\omega_1 \tau) e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1(\omega_1 - \omega_2)} - \frac{\sin(\omega_2 \tau) e^{-i\omega_2 t}}{\omega_2(\omega_1 - \omega_2)} \right] \\ &= \frac{2f_0 i}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2)} (\omega_2 \sin(\omega_1 \tau) e^{-i\omega_1 t} - \omega_1 \sin(\omega_2 \tau) e^{-i\omega_2 t}). \end{aligned} \quad (8)$$

A forma real de (8) é obtida escrevendo os senos em sua forma exponencial. Obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{f_0}{\omega_0^2} \left[\cos p(t - \tau) + \frac{\alpha}{p} \sin p(t - \tau) \right] e^{-\alpha(t-\tau)} \\ &\quad - \frac{f_0}{\omega_0^2} \left[\cos p(t + \tau) + \frac{\alpha}{p} \sin p(t + \tau) \right] e^{-\alpha(t+\tau)}, \end{aligned} \quad (9)$$

Com $p = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Se $t < -\tau$, o contorno é fechado pelos quadrantes superiores do gráfico e fornece zero.

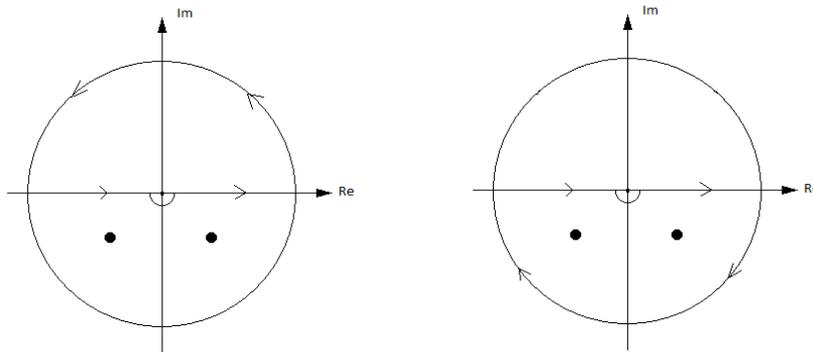
Para $|t| < \tau$, fazemos a análise da integral separando-a em duas partes:

$$x(t) = -\frac{f_0}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega + \frac{f_0}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\omega(t+\tau)}}{\omega(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

O primeiro termo da expressão acima pode ser calculado novamente pelos quadrantes superiores do gráfico, enquanto o segundo pelos quadrantes inferiores. O resultado obtido é:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{f_0}{\omega_1\omega_2} - \frac{f_0 e^{-i\omega_1(t+\tau)}}{\omega_1(\omega_1 - \omega_2)} + \frac{f_0 e^{-i\omega_2(t+\tau)}}{\omega_2(\omega_1 - \omega_2)} \\ &= \frac{f_0}{\omega_0^2} - \frac{f_0}{\omega_0^2} \left[\cos p(t + \tau) + \left(\frac{\alpha}{p}\right) \sin p(t + \tau) \right] e^{-\alpha(t+\tau)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Figura 2– à esquerda, contorno fechado pelos quadrantes superiores, no sentido anti-horário e, à direita, contorno fechado pelos quadrantes inferiores, no sentido horário.



Fonte: produção do autor.

Funções de Green

Vamos considerar agora, o exemplo de uma partícula de massa m que se move ao longo de um eixo unidimensional sob uma força $F(t)$ (BUTKOV, 1998). A sua lagrangeana fica:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= m \frac{\dot{x}^2}{2} + xF(t) \end{aligned} \quad (11)$$

e com a equação de Euler-Lagrange obtemos a equação de movimento:

$$\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) = 0$$

$$F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (12)$$

A solução geral pode ser escrita como a soma das soluções homogênea e particular:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t). \quad (13)$$

A solução homogênea é um polinômio de primeiro grau $a't + b'$, cujas constantes são determinadas pelas condições de contorno sobre a solução geral:

$$x(t_1) = a't_1 + b' = x_1 \quad (14)$$

$$x(t_2) = a't_2 + b' = x_2.$$

Resolvendo o sistema (14), obtemos:

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, b = \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{t_2 - t_1} \quad (15)$$

e, portanto, a solução homogênea fica:

$$x_{hom}(t) = \frac{x_1(t_2 - t) + x_2(t - t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (16)$$

A solução não-homogênea pode ser encontrada com o método das funções de Green (BUTKOV, 1998), de acordo com as condições de contorno do problema. Assumiremos que x_{part} se anule em t_1 e em t_2 , o que nos leva à solução

$$x_{part}(t) = \int_{t_1}^{t_2} F(t') G(t, t') dt', \quad (17)$$

sendo $G(t, t')$ a função de Green, com as condições $G(t_1, t') = G(t_2, t') = 0$.

Derivando a equação (17) duas vezes no tempo e multiplicando por m , obtemos:

$$m \frac{d^2 x_{part}}{dt^2} = \int_{t_1}^{t_2} F(t') m \frac{\partial^2 G(t, t')}{\partial t^2} dt', \quad (18)$$

mas pela equação (12) chegamos à igualdade:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t') m \frac{\partial^2 G(t, t')}{\partial t^2} dt' = F(t)$$

e para que a igualdade seja mantida, precisamos que

$$m \frac{\partial^2 G(t, t')}{\partial t^2} = \delta(t - t'). \quad (19)$$

Além disso, a função delta de Dirac é nula para todo $t \neq t'$ e, portanto, a função de Green satisfaz a equação diferencial homogênea

$$\frac{\partial^2 G(t, t')}{\partial t^2} = 0, (t \neq t'). \quad (20)$$

A função de Green procurado tem, então, a seguinte forma:

$$G(t, t') = \begin{cases} at + c, & t_1 \leq t \leq t' \\ bt + d, & t' < t \leq t_2. \end{cases} \quad (21)$$

Para determinar as constantes, usamos as condições de contorno:

$$\begin{aligned} G(t_1, t') &= at_1 + c = 0 \rightarrow c = -at_1 \\ G(t_2, t') &= bt_2 + d = 0 \rightarrow d = -bt_2, \end{aligned} \quad (22)$$

além do fato de $G(t, t')$ ser contínua em t' , já que esta representa a solução do nosso problema:

$$a(t' - t_1) = b(t' - t_2) \rightarrow b = \frac{a(t' - t_1)}{t' - t_2}. \quad (23)$$

A função de Green agora fica:

$$G(t, t') = \begin{cases} a(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t' \\ \frac{a(t' - t_1)(t - t_2)}{t' - t_2}, & t' < t \leq t_2. \end{cases} \quad (24)$$

Integramos a equação (19) no intervalo de $t' - \epsilon$ a $t' + \epsilon$ e fazemos $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \frac{d^2 G(t, t')}{dt^2} dt &= \frac{1}{m} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \delta(t - t') dt \\ \frac{dG(t' + 0, t')}{dt} - \frac{dG(t' - 0, t')}{dt} &= \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (25)$$

Estas derivadas podem ser calculadas através das relações em (24):

$$\frac{dG(t' + 0, t')}{dt} = \frac{a(t' - t_1)}{t' - t_2}, \quad \frac{dG(t' - 0, t')}{dt} = a$$

o que nos dá, substituindo em (25):

$$a = \frac{1}{m} \frac{(t' - t_2)}{(t_2 - t_1)}. \quad (26)$$

A função de Green procurada, que fornece a solução particular através da relação (17), para uma força externa $F(t)$, é, então:

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m} \frac{(t' - t_2)(t - t_1)}{(t_2 - t_1)}, & t_1 \leq t \leq t' \\ \frac{1}{m} \frac{(t' - t_1)(t - t_2)}{(t_2 - t_1)}, & t' \leq t \leq t_2. \end{cases} \quad (27)$$

Equação de Klein-Gordon

Partindo da equação para a energia total relativística (GREINER 2000), em unidades naturais ($c = \hbar = 1$)

$$E^2 = p^2 + m^2, \quad (28)$$

com as transformações

$$E \rightarrow \hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow \hat{p} = -i \nabla \quad (29)$$

podemos reescrever a equação (28) como:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\nabla^2 + m^2$$

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (30)$$

com a definição do operador D'Alambertiano $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ (GREINER, 2000) e, sendo ϕ o campo, então, a equação (30) é a equação de Klein-Gordon homogênea.

Contudo as equações de movimento da Teoria de Campos têm, geralmente, a forma da equação de Klein-Gordon não-homogênea (ITZYKSON; ZUBER, 1980),

$$(\square + m^2)\phi(x) = j(x), \quad (31)$$

na qual $j(x)$ é uma fonte. Através do método de Green, podemos escrever a equação (31) como

$$(\square + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (32)$$

As soluções de (31) serão dadas então pela solução homogênea e não-homogênea:

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \int d^4x' G(x - x') j(x'). \quad (33)$$

A equação (32) é resolvida através de uma transformada de Fourier

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \tilde{G}(p)$$

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')}, \quad (34)$$

que, no lugar de uma equação integral nos dá uma equação algébrica:

$$(\square + m^2) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \tilde{G}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')}$$

$$(\square + m^2) \left(e^{-ip(x-x')} \tilde{G}(p) \right) = e^{-ip(x-x')}$$

$$(-p^2 + m^2)\tilde{G}(p) = 1. \quad (35)$$

Da equação (35), vemos que é preciso lidar com o zero do denominador ao dividir ambos os seus lados por $-p^2 + m^2$. Para isso, podemos definir, através de pequenas deformações no contorno de integração expressas pelo pequeno acréscimo imaginário $i\epsilon$, as funções retardada e avançada de Green:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{adv}^{ret}(p) &= \frac{-1}{(p_0 \pm i\epsilon) - p^2 - m^2}, \\ G_{adv}^{ret}(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{(p_0 \pm i\epsilon) - p^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

além do propagador de Feynman:

$$G_F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (37)$$

Movimento Browniano

Considere um viajante que passeia aleatoriamente por um retículo d -dimensional infinito no espaço euclidiano (ITZYKSON; DROUFFE, 1989).

A cada intervalo de tempo τ , o viajante se desloca por uma distância a até um sítio vizinho com igual probabilidade de $1/q$. O retículo é então construído a partir de d vetores ortogonais $\hat{e}_{(1)}, \hat{e}_{(2)}, \dots, \hat{e}_{(d)}$, de maneira que $\hat{e}_{(\mu)} \cdot \hat{e}_{(\nu)} = a^2 \delta_{\mu\nu}$. Cada sítio possui um número $q=2d$ de vizinhos.

Como exemplo, em uma dimensão um vetor $\hat{e}_{(1)}$ constrói, a partir da origem $\vec{x}_0 = 0$, uma reta com sítios localizados em $\vec{x} = 0, \pm a\hat{e}_{(1)}, \pm 2a\hat{e}_{(1)}, \dots$, então, cada sítio localizado em $\vec{x}_{n+1} = (na + a)\hat{e}_{(1)}$; em duas dimensões, digamos x e y , temos a superposição das infinitas retas $x = 0, \pm a, \pm 2a, \dots$ e $y = 0, \pm a, \pm 2a, \dots$, que formam uma rede com os sítios localizados nas intersecções e assim por diante para dimensões maiores.

A probabilidade condicional de o viajante estar na posição \vec{x}_1 no tempo t_1 , dado que sua posição inicial era \vec{x}_0 no tempo t_0 , para $t_1 = t_0$, pode ser escrita como

$$P(\vec{x}_1, t_0 | \vec{x}_0, t_0) = \delta_{x_1, x_0} \quad (38)$$

e a condição de normalização, para um tempo t_1 fixado, é

$$\sum_{x_1} P(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_0, t_0) = 1. \quad (39)$$

Dado que o viajante só pode alcançar um ponto x se, em um intervalo de tempo anterior ele estivesse em um sítio vizinho $\vec{x}' = \vec{x} \pm a\hat{e}_{(\mu)}$, a relação das probabilidades nos tempos $t + \tau$ e t é dada por

$$P(\vec{x}_1, t + \tau | \vec{x}_0, t_0) = \frac{1}{2d} \sum_{\text{vizinhos de } x} P(\vec{x}', t | \vec{x}_0, t_0). \quad (40)$$

Podemos discretizar a derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^\mu} &\approx \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x} - a\hat{e}_{(\mu)})}{a} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial (x^\mu)^2} &\approx \frac{\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^\mu} - \frac{\partial f(\vec{x} - a\hat{e}_{(\mu)})}{\partial x^\mu}}{a} \\ &= \frac{[f(\vec{x} + a\hat{e}_{(\mu)}) - 2f(\vec{x}) + f(\vec{x} - a\hat{e}_{(\mu)})]}{a^2} \end{aligned}$$

para obter o operador laplaciano em sua versão discreta

$$\Delta_r f(x) = \frac{1}{a^2} \sum_{\mu=1}^d [f(\vec{x} + a\hat{e}_{(\mu)}) - 2f(\vec{x}) + f(\vec{x} - a\hat{e}_{(\mu)})] \quad (41)$$

e, então, reescrever a equação (40):

$$\begin{aligned} &\frac{P(\vec{x}, t + \tau | \vec{x}_0, t_0) - P(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0)}{\tau} \\ &= \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d [P(\vec{x} + a\hat{e}_{(\mu)}, t | \vec{x}_0, t_0) + P(\vec{x} - a\hat{e}_{(\mu)}, t | \vec{x}_0, t_0)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d 2P(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0) \right\} \\ &= \frac{1}{2d\tau} \sum_{\mu=1}^d [P(\vec{x} + a\hat{e}_{(\mu)}, t | \vec{x}_0, t_0) + P(\vec{x} - a\hat{e}_{(\mu)}, t | \vec{x}_0, t_0) - 2P(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0)], \end{aligned}$$

que nos dá

$$\frac{P(\vec{x}, t + \tau | \vec{x}_0, t_0) - P(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0)}{\tau} = \Delta_r P(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0), \quad (42)$$

com a condição de que:

$$\tau = \frac{a^2}{2d}. \quad (43)$$

Observe que a equação (42) é a versão discreta da equação de difusão no contínuo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)P = 0, \quad (44)$$

bastando considerar os limites $\tau \rightarrow 0$ e $a \rightarrow 0$ para recuperarmos a equação (44).

A equação (40) pode ser resolvida através de uma transformada de Fourier:

$$P(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{P}(\vec{k}, t), \quad (45)$$

que nos dá:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{P}(\vec{k}, t + \tau) \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \sum_{\mu=1}^d \left[e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} + a\hat{e}_{(\mu)})} + e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - a\hat{e}_{(\mu)})} \right] \tilde{P}(\vec{k}, t) \\ e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{P}(\vec{k}, t + \tau) &= \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d \left[e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} + a\hat{e}_{(\mu)})} + e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - a\hat{e}_{(\mu)})} \right] \tilde{P}(\vec{k}, t) \\ \tilde{P}(\vec{k}, t + \tau) &= \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \left[\frac{e^{ia\vec{k} \cdot \hat{e}_{(\mu)}} + e^{-ia\vec{k} \cdot \hat{e}_{(\mu)}}}{2} \right] \tilde{P}(\vec{k}, t) \\ \tilde{P}(\vec{k}, t + \tau) &= \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)} \tilde{P}(\vec{k}, t), \quad (46) \end{aligned}$$

na qual $k_{(\mu)} = \vec{k} \cdot \hat{e}_{(\mu)}$. Por outro lado, temos a condição inicial em $t = t_0$ dada pela equação (38):

$$\begin{aligned} P(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0) &= \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &= a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \\ &= a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_0}, \quad (47) \end{aligned}$$

portanto, comparando a equação (45) à equação (47), obtemos

$$P(\vec{k}, t_0) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_0}. \quad (48)$$

Para deduzirmos a expressão final para (45), utilizamos a relação de recorrência obtida em (46):

$$\tilde{P}(\vec{k}, t = t_0 + \tau) = \tilde{P}(\vec{k}, t_0) \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)}$$

$$= e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_0} \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos ak_{(\mu)}; \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\vec{k}, t = t_0 + 2\tau) &= \tilde{P}(\vec{k}, t_0 + \tau) \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos ak_{(\mu)} \\ &= e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_0} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos ak_{(\mu)} \right)^2 \end{aligned} \quad (50)$$

e é fácil ver o padrão construído. De maneira geral, temos:

$$\tilde{P}(\vec{k}, t = t_0 + n\tau) = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_0} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos ak_{(\mu)} \right)^n \quad (51)$$

e, portanto, a equação (45) fica:

$$P(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_0, t_0) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos ak_{(\mu)} \right)^{\frac{t_1 - t_0}{\tau}}. \quad (52)$$

Podemos agora tomar o limite do contínuo, ou seja, considerar a e τ indo a zero. Definimos então a densidade de probabilidade p :

$$p(\vec{x}_1 - \vec{x}_0, t_1 - t_0) = \lim_{a, \tau \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos ak_{(\mu)} \right)^{\frac{t_1 - t_0}{\tau}}. \quad (53)$$

O limite pode ser calculado expandindo-se o cosseno em sua série de Taylor:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos ak_{(\mu)} \right) &= \frac{1}{d} (\cos ak_{(1)} + \cos ak_{(2)} + \dots + \cos ak_{(d)}) \\ &= \frac{1}{d} \left[\left(1 - \frac{a^2 k_{(1)}^2}{2} + \dots \right) + \left(1 - \frac{a^2 k_{(2)}^2}{2} + \dots \right) + \dots + \left(1 - \frac{a^2 k_{(d)}^2}{2} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{d} \left[d - \frac{a^2}{2} \underbrace{(k_{(1)}^2 + k_{(2)}^2 + \dots + k_{(d)}^2)}_{\equiv \vec{k}^2} + \dots \right] \\ &\approx 1 - \frac{a^2 \vec{k}^2}{2d} \\ &= 1 - \tau \vec{k}^2, \end{aligned} \quad (54)$$

pela equação (43) e temos, portanto, que

$$\begin{aligned} \lim_{a, \tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)} \right)^{\frac{t_1-t_0}{\tau}} &\approx \lim_{\tau \rightarrow 0} (1 - \tau \vec{k}^2)^{\frac{t_1-t_0}{\tau}} \\ &= e^{-\frac{t_1-t_0}{k^2}} \end{aligned} \quad (55)$$

e a equação (53) fica:

$$\begin{aligned} p(\vec{x}_1 - \vec{x}_0, t_1 - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-(t_1-t_0)\vec{k}^2 + i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)} \\ &= e^{-\frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2}{4(t_1-t_0)}} \sqrt{\frac{\pi}{(t_1-t_0)}} \frac{1}{(2\pi)^d} \\ &= e^{-\frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2}{4(t_1-t_0)}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{(t_1-t_0)}} \frac{1}{(2\pi)} \right)^d \\ &= \frac{1}{[4\pi(t_1-t_0)]^{d/2}} e^{-\frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2}{4(t_1-t_0)}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Podemos pensar ainda na probabilidade de a partícula chegar em um ponto x_1 fixo, a partir de x_0 , que será dada pela soma das probabilidades de todos os possíveis caminhos entre x_1 e x_0 , ou seja, t_1 pode ir de t_0 até infinito, já que o passeio é aleatório. Esta soma de probabilidades será a nossa função de Green – perceba também que sua representação integral é dada pela fórmula da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica:

$$G(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = \sum_{t_1=t_0}^{\infty} P(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_0, t_0) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)}}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)}}. \quad (57)$$

Para $a\vec{k}$ pequeno, a equação (57) tem o comportamento aproximado

$$\begin{aligned} G(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) &\approx a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{a^2 \vec{k}^2}{2d}\right)} \\ &= a^{d-2} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{2d}{\vec{k}^2}, \end{aligned} \quad (58)$$

que se mostra divergente. Introduzimos então a função de Green subtraída:

$$\begin{aligned} G^s(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) &= G(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) - G(0) \\ &= \sum_{t_1=t_0}^{\infty} [P(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_0, t_0) - P(\vec{x}_0, t_1 | \vec{x}_0, t_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)}}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)}} - a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)}} \\
&= a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\cos \vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) - 1}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)}}, \quad (59)
\end{aligned}$$

na qual tomamos a parte real, e que agora está bem definida. Entretanto, o seguinte resultado para o caso unidimensional mostra que a função de Green se tornou negativa:

$$G^s(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = -\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_0|}{a}, \quad (60)$$

o que tirou o seu significado de soma de probabilidades.

Modificamos mais uma vez a função de Green para

$$G(\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \lambda) = \lambda \sum_{t_1=t_0}^{\infty} \lambda^{\frac{t_1-t_0}{\tau}} P(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_0, t_0), \quad (61)$$

cuja representação integral é:

$$\begin{aligned}
G(\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \lambda) &= a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\lambda e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)}}{1 - \frac{\lambda}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)}} \\
&= a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos a k_{(\mu)}}. \quad (62)
\end{aligned}$$

A equação (61) satisfaz a equação de Klein-Gordon, que é pré-requisito para uma teoria relativística:

$$[-\Delta_r + (\lambda^{-1} - 1)]G(\vec{x}, \lambda) = \delta_{\vec{x},0} \quad (63)$$

e, portanto, identificamos o parâmetro λ como o termo m^2 :

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{m^2 a^2}{2d}. \quad (64)$$

Finalmente, a função de Green no limite do contínuo será dada por:

$$\begin{aligned}
g(\vec{x}) &= \lim_{a, \tau \rightarrow 0} \frac{a^2}{2da^d} G(\vec{x}, \lambda) \\
&= \lim_{a, \tau \rightarrow 0} \frac{a^2}{2da^d} \lambda \sum_{\frac{t}{\tau}=0}^{\infty} \lambda^{t/\tau} P(\vec{x}, t) \\
&= \lim_{a, \tau \rightarrow 0} \frac{a^2}{2d} \left(1 + \frac{m^2 a^2}{2d}\right)^{-1} \sum_{\frac{t}{\tau}=0}^{\infty} \left(1 + \frac{m^2 a^2}{2d}\right)^{-\frac{t}{\tau}} \frac{P(\vec{x}, t)}{a^d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \lim_{a, \tau \rightarrow 0} \tau \left(1 + \frac{m^2 a^2}{2d} \right) \sum_{\substack{t \\ \tau=0}}^{\infty} e^{-m^2 t} p(\vec{x}, t) \\
&\approx \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{\substack{t \\ \tau=0}}^{\infty} \tau e^{-m^2 t} p(\vec{x}, t) \\
&= \int_0^{\infty} dt e^{-m^2 t} p(\vec{x}, t) \\
&= \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-m^2 t - \frac{\vec{x}^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}, \tag{65}
\end{aligned}$$

cujas expressões para os casos $d = 1, 2, 3, 4$ podem ser encontradas de acordo com Gradshteyn (2000). Para $d = 1$:

$$\begin{aligned}
g(\vec{x}) &= \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-m^2 t - \frac{\vec{x}^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{4\pi m^2}} e^{-2\sqrt{\frac{\vec{x}^2 m^2}{4}}} \\
&= \frac{e^{-m|\vec{x}|}}{2m}; \tag{66}
\end{aligned}$$

para $d = 2$:

$$\begin{aligned}
g(\vec{x}) &= \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-m^2 t - \frac{\vec{x}^2}{4t}}}{4\pi t} \\
&= \frac{2}{4\pi} K_0 \left(2\sqrt{\frac{m^2 \vec{x}^2}{4}} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} K_0(m|\vec{x}|); \tag{67}
\end{aligned}$$

para $d = 3$:

$$\begin{aligned}
g(\vec{x}) &= \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-m^2 t - \frac{\vec{x}^2}{4t}}}{(4\pi t)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{4\pi}{\vec{x}^2}} e^{-2\sqrt{\frac{\vec{x}^2 m^2}{4}}} \\
&= \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} e^{-m|\vec{x}|}; \tag{68}
\end{aligned}$$

e para $d = 4$:

$$\begin{aligned}
 g(\vec{x}) &= \int_0^\infty dt \frac{e^{-m^2 t - \frac{\vec{x}^2}{4t}}}{(4\pi t)^2} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^2} 2 \left(\frac{\vec{x}^2}{4m^2} \right)^{-\frac{1}{2}} K_{-1} \left(2 \sqrt{\frac{\vec{x}^2 m^2}{4}} \right) \\
 &= \frac{m}{4\pi^2 |\vec{x}|} K_1(m|\vec{x}|). \tag{69}
 \end{aligned}$$

Note que as funções de Bessel (BOAS, 1983) modificadas obtidas nos casos bidimensional e quadridimensional podem ainda ser analisadas no limite em que a massa vai a zero. As equações (67) e (69) tornam-se, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 g(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi} K_0(m|\vec{x}|) \\
 &\approx -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{m|\vec{x}|}{2} \right); \tag{70}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(\vec{x}) &= \frac{m}{4\pi^2 |\vec{x}|} K_1(m|\vec{x}|) \\
 &\approx \frac{m}{4\pi^2 |\vec{x}|} \left[\frac{\Gamma(1)}{2} \left(\frac{2}{m|\vec{x}|} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 |\vec{x}|^2}. \tag{71}
 \end{aligned}$$

Conclusão

Neste trabalho foram estudados conceitos matemáticos para a resolução de equações diferenciais tais como a transformada de Fourier e o método das funções de Green, além do estudo da equação de Klein-Gordon. Os resultados que obtivemos do movimento browniano foram os propagadores de uma partícula escalar para uma, duas, três e quatro dimensões do espaço-tempo plano e uniforme. A tabela a seguir sintetiza os resultados – L denota dimensão de comprimento:

Tabela 1: resumo dos propagadores nas diversas dimensões.

Dimensão	Propagador	Análise dimensional
----------	------------	---------------------

$d = 1$	$g(\vec{x}) = \frac{e^{-m \vec{x} }}{2m}$	$[g(\vec{x})] = L^1$
$d = 2$	$g(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{m \vec{x} }{2}\right)$	$[g(\vec{x})] = L^0$
$d = 3$	$g(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi \vec{x} } e^{-m \vec{x} }$	$[g(\vec{x})] = L^{-1}$
$d = 4$	$g(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2 \vec{x}^2 }$	$[g(\vec{x})] = L^{-2}$

Referências

BOAS, M. L. **Mathematical Methods In The Physical Sciences**. 2. ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1983.

BUTKOV, E. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: Ltc, 1988.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. Exponential Functions. In: GRADSHTEYN, Israil S.; RYZHIK, Iosif M. **Tables of Integrals, Series, and Products**. 6. ed. Nova Iorque: Academic Press, 2000. Cap. 3. p. 331-364.

GREINER, W. **Relativistic Quantum Mechanics: wave equations**. Nova Iorque: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

ITZYKSON, C.; DROUFFE, J. From brownian motion to euclidean fields. In: ITZYKSON, Claude; DROUFFE, Jean-michel. **Statistical Field Theory: from Brownian motion to renormalization and lattice gauge theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. Cap. 1. p. 1-47.

ITZYKSON, C.; ZUBER, J. Classical Theory: Propagation and Radiation: Green Functions. In: ITZYKSON, Claude; ZUBER, Jean-bernard. **Quantum Field Theory**. Nova Iorque: Mcgraw-hill, 1980. Cap. 1. p. 32-35.