

## O EFEITO DO ARRASTO NO LANÇAMENTO DE FOGUETES ARTESANAIS: ASPECTOS TEÓRICOS

### EFFECT OF DRAG ON THE LAUNCHING OF HANDMADE ROCKETS: THEORETICAL ASPECTS

Alessandra Mendes de Queiroz, alemendes\_mq@hotmail.com  
Rodrigo Rocha Cuzinato, rodrigo.cuzinato@unifal-mg.edu.br  
Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, Minas Gerais

Submetido em 23/06/2016

Revisado em 01/07/2016

Aprovado em 10/10/2016

**Resumo** Este trabalho apresenta os fundamentos teóricos para a descrição do movimento balístico sob influência do arrasto desenvolvido por dois tipos de foguetes artesanais: os impulsionados por água pressurizada e os propelidos pelos gases liberados na queima de combustível sólido. Os primeiros desenvolvem velocidades baixas ( $v \approx 10 \text{ m/s}$ ) e, por isso, sofrem ação de uma força de arrasto linear com  $v$ . Os segundos adquirem velocidades iniciais altas o suficiente para requerer a modelagem da força de arrasto como quadrática na velocidade. Resolvemos em detalhes as equações de Newton nos dois casos, construindo as funções horárias das posições e as equações de trajetória. Obtemos as funções da velocidade inicial do projétil e do coeficiente de arrasto para baixas velocidades em função do tempo de voo do foguete e de seu alcance. Mostramos que o alcance dos foguetes é menor na presença do arrasto do que na ausência dele.

**Palavras-chave:** movimento balístico, coeficiente de arrasto, alcance para altas e baixas velocidades.

**Abstract** This work lays down the theoretical foundations for the description of ballistic motion under the drag force of two types of handmade rockets: the ones propelled by pressurized water and those set into motion by solid propellant rocket boosters. Water rockets develop low velocities ( $v \approx 10 \text{ m/s}$ ) and are thus subjected to a drag force linear in  $v$ . Solid rocket boosters have velocities high enough to require the modelling with a drag force quadratic in  $v$ . We apply Newton laws of motion and build the equations for horizontal and vertical displacements as functions of time. We calculate the equations for trajectories on both cases. The initial velocity of the rocket and the drag coefficient for low velocities are given in terms of the range and time of flight. It is shown that the range is smaller in the presence of drag.

**Keywords:** ballistic motion, drag coefficient, range for low and high velocities.

## 1. Introdução

As disciplinas de mecânica básica nos cursos de engenharia, física e matemática geralmente abordam o lançamento oblíquo de um corpo sem considerar a resistência do ar. Isso provoca um distanciamento com o caso real, onde a presença do ar influencia na trajetória.

Existe uma maneira experimental relativamente simples de estudar a trajetória balística de projéteis: construir foguetes artesanais propelidos à água (CUZINATTO et. al., 2015) ou a combustível químico (PIZZO, et. al., 2015). Esses foguetes terão seus movimentos descritos pelas leis de Newton e seus alcances afetados pela presença a força de arrasto. O objetivo central desse trabalho é descrever matematicamente como essa força de arrasto age sobre os projéteis, modificando a curva parabólica do movimento oblíquo na ausência do atrito com o fluido ambiente (HALLIDAY et. al, 2008).

A força de arrasto aparece na mesma direção do movimento, porém em sentido oposto a ele, levando ao retardo do movimento corpo. A força de arrasto é representada genericamente pela equação:

$$|F_r| = av + bv^2, \quad (1)$$

sendo  $a$  e  $b$  constantes que dependem das propriedades do corpo e do fluido e  $v$  a velocidade do corpo. Em velocidades baixas, menores que aproximadamente 24m/s (MARION e THORNTON, 2004), a equação genérica do arrasto (1) reduz-se à parte linear; i.e. desconsidera-se o termo quadrático na velocidade. Esse termo quadrático torna-se importante a velocidades maiores, entre 24m/s e cerca de 300m/s (velocidade do som), caso em que tomamos apenas o segundo termo do lado direito de (1).

Neste trabalho, teremos como objetivo estudar o lançamento oblíquo de foguetes de forma a encontrar a equação que define a constante de arrasto  $k$  considerando duas situações: a primeira é aquela em que o projétil desenvolve baixas velocidades ( $v/v \ll 1$ ), quando vale  $|F_r| = av$ ; a segunda é o caso em que  $|F_r| = bv^2$  que vale para  $v/v \gg 1$ .

## 2. Estudo físico do Movimento Oblíquo dos Projéteis com baixas velocidades

O desenvolvimento dessa seção é baseado na Seção 2.7 da Ref. (MARION e THORNTON, 2004). Percorreremos este caminho para fixar a notação e preparar o leitor para a contribuição nova deste trabalho que é a equação para a constante de arrasto  $k$  em função do alcance do projétil e do seu tempo de voo.

### 2.1. As funções horárias das velocidades e das posições

Um projétil que é lançado em ambiente aberto a um ângulo inicial  $\theta_0$  com a horizontal, está submetido a um movimento denominado oblíquo. Neste caso, serão gerados dois tipos de movimento simultâneos: o vertical (subida e descida) e o horizontal (corpo segue em sentido de  $x$  para frente, conforme a Figura 1). O projétil sai com uma velocidade inicial de módulo  $v_0$  e está sujeito à força gravitacional  $\vec{P}$ , na vertical para baixo, e à força de arrasto  $\vec{F}_r$  na direção de  $-\vec{v}/v$ .

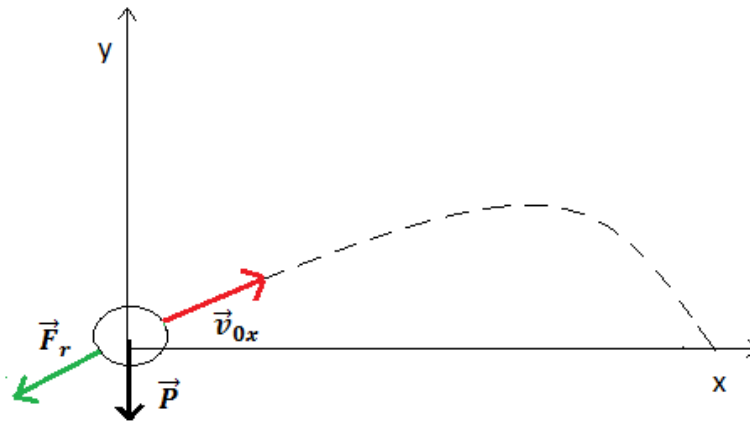


Figura 1: Vetores relevantes para o estudo do movimento oblíquo de um projétil.

Como o movimento oblíquo tem componentes nas direções horizontal e vertical, surge à necessidade de decompormos o estudo do movimento em dois eixos  $x$  e  $y$ .

Analisaremos primeiramente a componente do movimento ao longo do eixo  $x$ . Nesta direção, a única força atuante no sistema é a componente  $x$  da

força de arrasto, dada por  $F_{rx} = -kmv_x$ , em que  $k$  representa a constante de arrasto,  $m$  a massa e  $v_x$  é a componente da velocidade no eixo  $x$ . A segunda Lei de Newton,

$$F = ma, \quad (2)$$

$$a_x = -kv_x \quad (3)$$

com  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ , na direção do eixo  $x$  dá:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -kv_x \\ \int \frac{dv_x}{v_x} &= -k \int dt \\ \ln v_x &= -kt + C_1. \end{aligned} \quad (4)$$

A constante de integração  $C_1$  é encontrada a partir da condição inicial  $v_x(t=0) = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$ . Isto significa que o projétil está em repouso na origem no instante inicial. De fato,

$$\begin{aligned} \ln v_{0x} &= -k \cdot 0 + C_1 \\ C_1 &= \ln v_{0x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4), encontramos:

$$\begin{aligned} \ln v_x &= -kt + \ln v_{0x} \\ \ln \frac{v_x}{v_{0x}} &= -kt \\ e^{-kt} &= \frac{v_x}{v_{0x}} \\ v_x &= v_{0x} e^{-kt}, \end{aligned} \quad (6)$$

que é a equação da velocidade do projétil. Como  $v_x = dx/dt$ ,

$$\int dx = \int v_{0x} e^{-kt} dt$$

$$x = \frac{v_{0x}}{k} e^{-kt} + C_2 . \quad (7)$$

Impondo, na equação (7), a condição inicial de que o projétil está na origem do sistema de eixos no instante inicial,  $x(t = 0) = 0$ , determinamos a constante de integração  $C_2 = v_{0x}/k$ . Com isso,

$$x = \frac{v_0 \cos \theta_0}{k} (1 - e^{-kt}) , \quad (8)$$

que é então a equação que descreve o movimento horizontal de um projétil submetido a força de arrasto.

Analisaremos agora a componente do movimento no eixo vertical  $y$  (Figura 1). Existem duas forças que atuam nesta direção, a componente vertical da força de arrasto  $F_{ry} = -kmv_y$  e a força peso  $P = mg$  sendo  $g$  a magnitude da aceleração gravitacional.<sup>1</sup> O sinal negativo em  $F_{ry}$  aparece porque o arrasto é sempre oposto à direção do movimento, direção esta determinada por  $v_y$ . Note como isso é consistente: quanto o movimento do projétil na direção  $y$  é para cima, a velocidade é positiva e o sinal negativo de  $F_{ry}$  indica que a força é para baixo; por outro lado, quando o movimento do projétil na direção  $y$  é para baixo, a velocidade é negativa (variações negativas da posição no tempo), o sinal negativo na equação de  $F_{ry}$  cancela o sinal negativo de  $v_y$ , levando a um sinal positivo global, o qual indica que a força é para cima (contrária ao movimento descendente, portanto). O sinal é negativo em  $P$ , pois a força peso é sempre vertical e para baixo. Dito isso, a 2ª Lei de Newton aplicada à direção  $y$  dá:

$$F_y = F_{ry} + P = ma_y .$$

$$a_y = -kv_y - g . \quad (9)$$

---

<sup>1</sup> Note que a constante de arrasto  $k$  é tomada como a mesma em ambas as direções do movimento, i.e.  $k = k_x = k_y$ . Isso é coerente contanto que o movimento aconteça em um meio homogêneo, o que é perfeitamente razoável para o ar nas imediações da superfície.

Como  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ , temos:

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv'_y}{kv'_y + g} = \int_0^t dt, \quad (10)$$

onde adotamos a condição inicial  $v_y(t=0) = v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$  e usamos  $v'_y$  no argumento da integral do lado direito de (10) apenas para evitar confusão com o limite superior de integração  $v_y = v_y(t)$ . Resolvendo a integral (10) pelo método da substituição de variáveis,<sup>2</sup> obtemos

$$v_y = \frac{g}{k} + \frac{kv_{0y} + g}{k} e^{-kt}. \quad (11)$$

Vamos encontrar a função  $y(t)$  do deslocamento vertical, empregando  $v_y = \frac{dy}{dt}$  na equação. (11). Fixamos o sistema de eixos na origem da trajetória do projétil, de modo que a altura inicial do movimento é nula:  $y(t=0) = y_0 = 0$ . Temos:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y dy' &= \int_0^t \left( \frac{g}{k} \right) dt + \frac{kv_{0y} + g}{k} \int_0^t e^{-kt'} dt \\ y &= \frac{(kv_0 \sin \theta_0 + g)}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}, \end{aligned} \quad (12)$$

que é equação que descreve o movimento na vertical.

Temos agora as duas equações para as funções horárias do projétil. Podemos encontrar uma equação que descreva a curva no espaço descrita pelo projétil; trata-se da equação da trajetória  $y = y(x)$ . Essa função é obtida isolando o tempo da equação do deslocamento horizontal (8),

---

<sup>2</sup> Sugerimos a troca de variáveis:  $u = kv'_y + g$ .

$$t = \frac{1}{k} \ln \left[ \frac{1}{1 - \frac{kx}{v_0 \cos \theta_0}} \right] \quad (13)$$

e substituindo na função horária das posições na vertical (12). O resultado é:

$$y = \left( \tan \theta_0 + \frac{g}{kv_0 \cos \theta_0} \right) x + \frac{g}{k^2} \ln \left[ 1 - \frac{kx}{v_0 \cos \theta_0} \right]. \quad (14)$$

Esta equação fornece as curvas da Figura 2 para diferentes valores de  $k$ . Elas representam a trajetória do projétil sujeito à força de arrasto linear no módulo da velocidade.

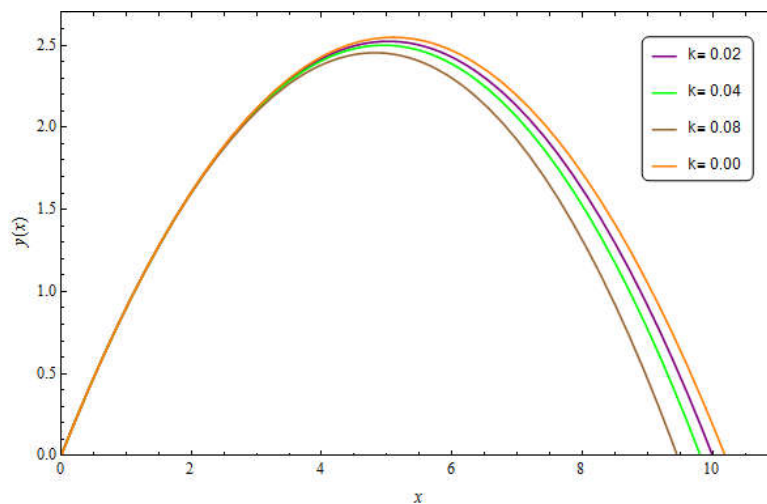


Figura 2: Construção das trajetórias de um projétil sob ação da força de arrasto linear em  $v$  para diferentes valores do parâmetro de arrasto  $k$ . [Curvas análogas às que aparecem na Fig. 2.8 da Ref. (MARION e THORNTON, 2004)] Para a construção das curvas nesta figura, usamos as condições iniciais  $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = y_0 = 0$  bem como  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Enfatizamos que o índice 0 indica que as quantidades são calculadas em  $t_0 = 0$ .

Observando a Figura 2 concluímos que a trajetória do movimento para  $k = 0$  é uma parábola. Isso é confirmado pela equação da trajetória do movimento oblíquo sem arrasto (HALLIDAY, et. al, 2008),

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2. \quad (\text{sem arrasto}) \quad (15)$$

Não fizemos a dedução dessa equação aqui, mas ela pode ser obtida de (14) no caso limite em que o arrasto é muito pequeno, i.e.  $k \ll 1$ . De fato, nessa circunstância,  $\lambda = \frac{kx}{v_0 \cos \theta_0}$  pode ser considerado pequeno, de modo que podemos usar a aproximação

$$\ln(1 + \lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + O(\lambda^3) \quad |\lambda| \ll 1, \quad (16)$$

na equação (14). Então, cancelamento de termos lineares em  $k^{-1}$  leva à equação. (15).

As equações. (3), (6), (8), (9), (11), (12) e (14) caracterizam completamente o movimento oblíquo com arrasto no regime de baixas velocidades do projétil. Convém comparar essas equações com o caso do movimento oblíquo sem arrasto. Para conveniência do leitor, isso é feito na Tabela 1.

Tabela 1: Equações para o movimento bidimensional com e sem a arrasto.

Movimento Oblíquo com $k = 0$			Movimento Oblíquo com $k \neq 0, v \ll 1$	
	Eixo $x$	Eixo $y$	Eixo $x$	Eixo $y$
<b>Aceleração</b>	$a_x = 0$	$a_y = 0$	$a_x = kv_y$	$a_y = kv_y - g$
<b>Velocidade</b>	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$	$v_x = v_{0x} e^{-kt}$	$v_y = \frac{g}{k} + \frac{kv_{0y} + g}{k} e^{-kt}$
<b>Deslocamento</b>	$x = x_0 + v_{0x}t$	$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$	$x = \frac{v_0 \cos \theta_0}{k} (1 - e^{-kt})$	$y = \frac{(kv_0 \sin \theta_0 + g)}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}$
<b>Equação da Trajetória</b>	$y = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$		$y = \left( \tan \theta_0 + \frac{g}{kv_0 \cos \theta_0} \right) x + \frac{g}{k^2} \ln \left[ 1 - \frac{kx}{v_0 \cos \theta_0} \right]$	
<b>Tipo de curva</b>	Parabólica		Figura 2	

Apesar da descrição físico-matemática do movimento estar completa, é interessante obter uma equação para o alcance  $R'$  do projétil em função do tempo



$T'$  de voo, pois essas quantidades são facilmente acessíveis experimentalmente.

## 2.2. O alcance $R'$ do projétil em função do tempo de voo $T'$ .

O alcance de um projétil em movimento oblíquo é medido como a distância horizontal  $x = x - x_0$  entre o ponto de partida e o ponto de impacto. Nessa definição de alcance, a altura  $y_0$  do ponto de partida de coordenada horizontal  $x_0$  deve ser a mesma altura  $y$  do ponto de impacto de coordenada horizontal  $x = R$ . Se o sistema de eixos é fixado no ponto de partida:  $x_0 = y_0 = 0$ . Usando essas informações nas equações da Tabela 1 para o movimento sem arrasto  $k = 0$ , temos:

$$\begin{cases} R = v_0 \cos \theta_0 T \\ 0 = v_0 \sin \theta_0 T - \frac{1}{2} g T^2 \end{cases} \quad (17)$$

que leva à equação para o alcance em função da velocidade inicial

$$R(v_0) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0) \quad (k = 0), \quad (18)$$

e conduz à expressão do alcance em função do tempo de voo:

$$R(T) = \frac{gT}{2 \tan \theta_0} \quad (k = 0). \quad (19)$$

O alcance no caso do movimento com arrasto ( $k \neq 0$ ) será denominado de  $R'$  para evitar confusão com as quantidades das duas equações acima. Da mesma forma, chamaremos de  $T'$  o tempo de voo no caso do movimento oblíquo com arrasto. A primeira ideia que poderíamos ter para escrever  $R'(v_0)$  seria isolar  $t = T'$  na equação (12), com  $y = 0$ ,

$$T' = \frac{(kv_0 \sin \theta_0 + g)}{kg} (1 - e^{-kT'}), \quad (20)$$

para, depois, substituir na equação (8) de  $x = R'$ . Porém a equação (20) é transcendental em  $T'$ . Só seremos capazes de encontrar a expressão para  $R'(v_0)$  ao resolvermos (20) para  $T'$  *aproximadamente*.

O que segue é chamado de **método perturbativo**,<sup>3</sup> e requer que o arrasto seja pequeno, i.e.  $k \ll 1$ . Nessa circunstância, o argumento da exponencial em (12) é também pequeno; consequentemente essa função pode ser expandida em sua série de Taylor (STEWART, 2010) de acordo com:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4). \quad (21)$$

Fazendo a expansão de  $e^{-kT'}$  de acordo com (21), mantendo termos até a ordem  $(kT')^3$  e substituindo o resultado em (20), temos:

$$T' = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} \left( \frac{1}{1 + \frac{kv_0 \sin \theta_0}{g}} \right) + \frac{1}{3} kT'^2. \quad (22)$$

Agora, podemos observar que a expressão entre parênteses na equação (22) tem a forma  $(1 \pm x)^{-1}$ . Essa forma possibilita a simplificação de (22) através da expansão em série de Taylor:<sup>4</sup>

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \pm x + x^2 \pm x^3 + \dots, \quad (23)$$

desde que  $x \ll 1$  onde, para nós,  $x = \frac{kv_0 \sin \theta_0}{g}$  é função de  $k$ . Isso implica a condição:

---

<sup>3</sup> Um outro método possível obter  $T'$  da equação (12) é o método numérico. Porém, preferimos adotar a abordagem analítica neste texto tanto quanto possível.

<sup>4</sup> Conforme apêndice D.8 da Ref. (MARION e THORNTON, 2004).

$$k \ll \frac{g}{v_0 \sin \theta}. \quad (24)$$

Substituindo a forma (23) em sua equação de origem (22) e mantendo a expansão até o termo quadrático, chegaremos a:

$$T' = \left( \frac{T'^2}{3} - \frac{2 v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right) k + \frac{2 v_0 \sin \theta}{g} + \frac{2 v_0^3 \sin^3 \theta}{g^3} k^2, \quad (25)$$

O último termo de (25) vai com  $k^2$  e, como  $k \ll 1$ , é desprezível frente aos demais termos. Por isso, escrevemos:

$$T' = \left( \frac{T'^2}{3} - \frac{2 v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right) k + \frac{2 v_0 \sin \theta}{g} \quad (26)$$

Ao tomarmos  $k = 0$  em (26), obtemos:

$$T' = \frac{2 v \sin \theta_0}{g} \equiv T, \quad (27)$$

que é a equação do tempo final de voo de um projétil no movimento sem atrito (MARION e THORNTON, 2004). Assim, podemos confirmar que as aproximações feitas estão válidas. Outra consequência desse fato é que  $T$  é uma primeira aproximação para o tempo de voo  $T'$  do movimento com arrasto. Esse fato pode ser usado no lado direito da equação (26): substituindo  $T' = T$  no parênteses de (26) leva a:<sup>5</sup>

$$T' = T \left( 1 - \frac{v \sin \theta_0}{3g} k \right), \quad (28)$$

---

<sup>5</sup> Equação (26) é uma equação do segundo grau em  $T'$ . Uma alternativa a essa técnica de fazer  $T' = T$  no lado direito de (26) é resolver diretamente a equação do segundo grau e manter apenas termos lineares em  $k$ . Isso leva ao mesmo resultado que (28).

que é expressão aproximada do tempo de voo para pequenos valores de  $k$ .

O alcance  $R'$  do movimento oblíquo com arrasto é o valor de  $x$  quando o tempo de voo é  $t = T'$  na equação (8). Usando a equação (21) em (8) com termos de até segunda ordem na expansão encontramos:

$$R' = R \left( 1 - \frac{4v \sin \theta_0}{3g} k \right), \quad (29)$$

onde,

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0), \quad (30)$$

é a equação para o alcance do movimento oblíquo sem arrasto ( $k = 0$ ).

A equação (29) mostra que o alcance de uma trajetória com arrasto é menor do que a mesma sem arrasto (MARION e THORNTON, 2004): vide sinal negativo no parênteses e também a Figura 2.

As equações (28) e (29) para  $T'$  e  $R'$  caracterizam completamente o movimento com arrasto para  $k \ll 1$ . Porém, ambos  $T'$  e  $R'$  dependem da velocidade inicial do projétil  $v_0$ . Essa quantidade não é acessível facilmente do ponto de vista experimental. Geralmente, medimos facilmente  $T'$ ,  $R'$  e  $\theta_0$ , mas não  $v_0$ . Por isso, as equações (28) e (29) não são as mais adequadas para calcularmos o coeficiente de arrasto  $k$ . Para esse fim é mais conveniente encontrar uma expressão do tipo  $k = k(T', R', \theta_0)$ . A determinação dessa equação para  $k$  passa pelo cálculo da expressão de  $v_0$  em termos de  $T'$ ,  $R'$  e  $\theta_0$ . É o que fazemos à seguir.

Sabemos que as equações (28) e (29) possuem como condição de validade o vínculo (24), iremos encontrar uma forma de determinar o valor de  $k$  e  $v_0$  considerando esta restrição. Para isso, vamos isolar o termo  $k$  da equação (28) para substituí-lo em (29). Então, teremos uma expressão do segundo grau variável em  $v_0$ , na forma:

$$\frac{3}{g} (2\sin\theta_0 \cos\theta_0) v_0^2 - (4\cos\theta_0 T') v_0 + R' = 0. \quad (31)$$

Pela fórmula de Bhaskara teremos duas raízes reais para (31):

$$v_0 = \frac{gT'}{3\sin\theta_0} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3R' \tan\theta_0}{2gT'^2}} \right]. \quad (32)$$

Para decidir qual sinal é mais adequado nos colchetes da equação (32), é necessário estudar a consistência dessa equação com o caso sem arrasto.

De fato, para  $k = 0$ ,  $T' = T$  e  $R' = R$ , c.f. equação (29) e (30). Nesse caso, (32) fica:

$$v_0 = \frac{gT}{3\sin\theta_0} \left( 1 \pm \frac{1}{2} \right). \quad (33)$$

Apenas a escolha do sinal positivo em (33) pode levar à expressão de  $T$  consistente com a equação (27). Por isso, o sinal negativo deve ser desprezado. Logo, em vez de (32), vale:

$$v_0 = \frac{gT'}{3\sin\theta_0} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{3R' \tan\theta_0}{2gT'^2}} \right]. \quad (34)$$

Substituindo (34) em (28) e isolando  $k$ , encontramos:

$$k = \frac{3g}{v \sin\theta_0} \left( 1 - \frac{gT'}{2v \sin\theta_0} \right), \quad (35)$$

que são as equações que precisamos para obter a velocidade inicial e o coeficiente de arrasto no movimento oblíquo do projétil como função de  $T'$ ,  $R'$  e  $\theta_0$ . Enfatizamos que as aproximações (34) e (35) valem para  $k \ll 1$ , o que equivale a dizer que a condição (24) deve ser satisfeita. As equações (34) e (35) são muito úteis do ponto de vista experimental: em um trabalho futuro,

pretendemos medir  $T'$ ,  $R'$  e  $\theta_0$  em lançamentos de foguetes de garrafas PET propelidos à água (usando cronômetro, fita métrica e transferidor) para, então, determinar o valor do coeficiente  $k$ .

### 3. Estudo físico do Movimento Oblíquo dos Projéteis com altas velocidades

Nesta etapa do estudo, vamos detalhar as equações para o movimento oblíquo com arrasto válido para velocidades entre  $24 \text{ m/s}$  e  $300 \text{ m/s}$  (MARION e THORNTON, 2004), que levam a  $F_r \propto v^2$ . Um trabalho mais recente abordando este tema foi realizado por Chudinov (2013), que tomamos como referência assim como outros artigos salientados no decorrer do estudo.

Um projétil é lançado sob um determinado ângulo  $\theta_0$  com a horizontal em um ambiente aberto. Considerando apenas as forças de arrasto e peso, vamos estudar este movimento de modo a encontrar a equação da velocidade e da posição ao longo de toda a trajetória.

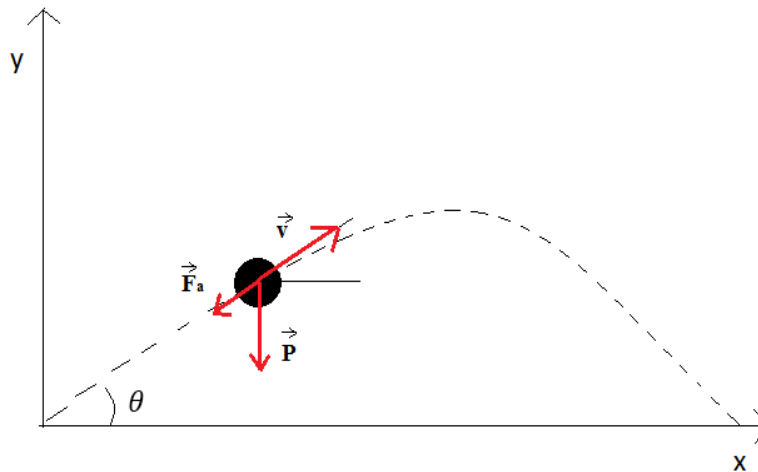


Figura 3: Representação esquemática da trajetória de uma projétil com movimento bidimensional e força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade.  $\vec{P}$  é a força gravitacional;  $\vec{F}_a$ , a força de arrasto e  $\vec{v}$ , a velocidade do projétil.

Na Figura 3 podemos observar que apenas a força peso está dirigida ao eixo  $y$  e a força de arrasto  $F_r$  juntamente com a velocidade  $v$  vai apresentando ângulos diferentes com a horizontal (eixo  $x$ ) conforme caminha pela trajetória

balística, logo, temos  $\theta = \theta(t)$ . Em vez de realizar um estudo da decomposição dos vetores na vertical e horizontal, vamos traçar novas coordenadas para o sistema, c.f. figura 4, sendo que o versor  $\hat{v}$  se orienta no sentido da velocidade do projétil e o versor  $\hat{p}$  é perpendicular a  $\hat{v}$ , ou seja, forma um ângulo de  $90^\circ$  com  $\hat{v}$ .

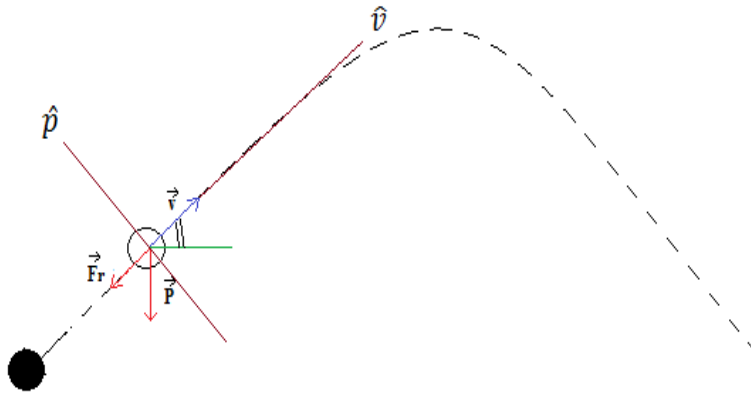


Figura 4: Representação dos eixos fixados no projétil.

Como o projétil possui altas velocidades, a equação geral (1) para o módulo da força de arrasto pode ser aproximada pelo segundo termo:

$$F_r = cmv^2, \quad (36)$$

onde  $c$  tem unidades de inverso de comprimento ( $m^{-1}$  no S.I.). Vamos iniciar os estudos pelo eixo da velocidade  $\hat{v}$ . Na Figura 4, observamos duas forças envolvidas na resultante  $|F_v| = m|a_v|$ : a componente da força peso ao longo do eixo de  $v$ :  $\bar{P}_v$ , e a força de arrasto  $F_r$ ; logo:

$$\begin{aligned} F_r - P_v &= ma_v \\ mcv^2 - P\cos\xi &= m \frac{dv}{dt}, \end{aligned} \quad (37)$$

sendo  $\xi$  o ângulo compreendido entre o eixo de  $\hat{v}$  e a força peso, como indicado na Figura 5. Note que  $\xi$  pode ser entendido como:

$$\xi = 90^\circ - \theta, \quad (38)$$

em que  $\theta$  é o ângulo da trajetória em relação à horizontal.

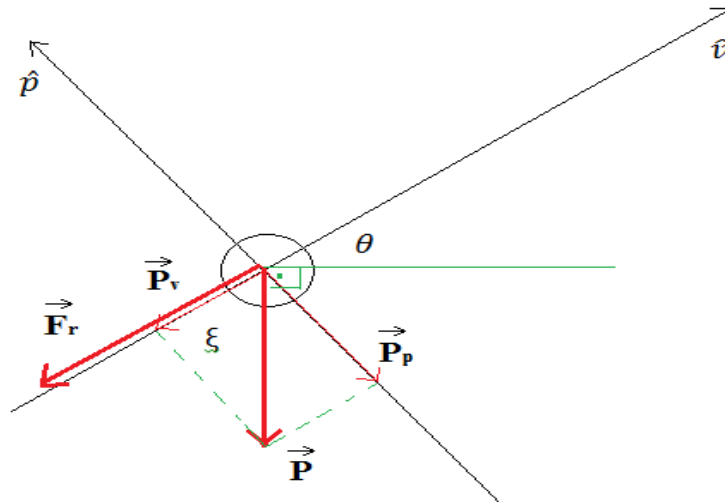


Figura 5: Representação das forças, suas componentes e dos ângulos  $\theta$  e  $\xi$ .

Assim, substituindo (37) em (36) e realizando algumas simplificações com equações trigonométricas (cosseno da soma de dois arcos), chegamos a:

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \theta - cv^2. \quad (39)$$

Voltamo-nos agora ao eixo de  $\hat{\theta}$ . A única força nesta direção é a componente  $\hat{\theta}$  da força da gravidade, assim:

$$P \sin \xi = ma_\theta, \quad (40)$$



sendo  $a_\theta$  a aceleração que possui direção perpendicular a velocidade. Substituindo a equação. (38) em (40), usando  $P = mg$  e empregando a regra do seno da soma de dois ângulos, podemos chegar a:

$$g \cos \theta = a_\theta . \quad (41)$$

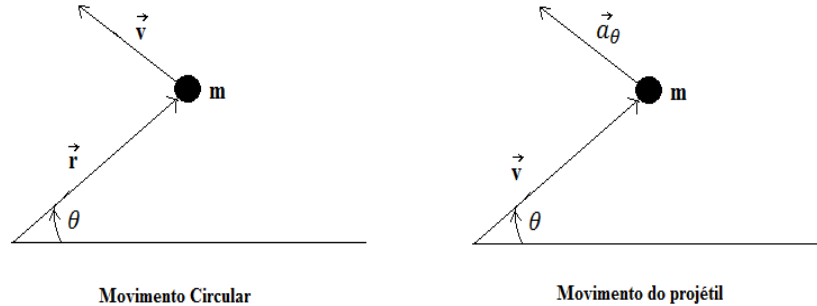


Figura 6: Representação da analogia do movimento circular uniforme de uma partícula de massa  $m$  (esquerda) com o movimento oblíquo de um projétil de massa  $m$  (direita). A analogia estabelece o método do *hodógrafo*: a equação (43) decorre de (42).

No movimento circular uniforme (MCU), a velocidade  $v$  tangencial a trajetória circular da partícula de massa  $m$  depende do módulo da velocidade angular  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  e do raio  $r$  da trajetória conforme

$$v = \omega r . \quad (42)$$

No caso do MCU, o vetor radial  $r$  é posicionado na origem dos eixos  $x$  e  $y$ , e  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $x$  e a direção radial  $r$ . Ademais, vale  $v = \frac{dr}{dt}$ .

Para o nosso movimento oblíquo, é o vetor velocidade  $v$  que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ . Além disso, vale  $a_\theta = \frac{dv}{dt}$ . Por analogia à (42) deve valer:

$$a_\theta = \omega v \quad (43)$$

onde, aqui também,  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  (o ângulo do movimento oblíquo é o mesmo do caso do MCU). A técnica que permite obter (43) a partir de (42) é chamada de método do *hodógrafo* (NUSSENZVEIG, 2004).

Substituindo (43) em (41), temos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g \cos \theta}{v}. \quad (44)$$

As equações (39) e (44) formam um sistema de equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes não constantes:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g \sin \theta - cv^2 \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g \cos \theta}{v} \end{aligned} \quad (45)$$

Se formos capazes de resolver este sistema, encontraremos as funções  $v(t)$  e  $\theta(t)$ . Com elas, é possível determinar as funções horárias das posições horizontal  $x(t)$  e vertical  $y(t)$ . Isso é verdade pois, por um lado,

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad (46)$$

e, por outro lado,  $v_x$  é a projeção do vetor  $v$  ao longo do eixo  $x$  com o qual  $v$  faz o ângulo  $\theta$  (Figura 7):

$$v_x = v \cos \theta \quad (47)$$

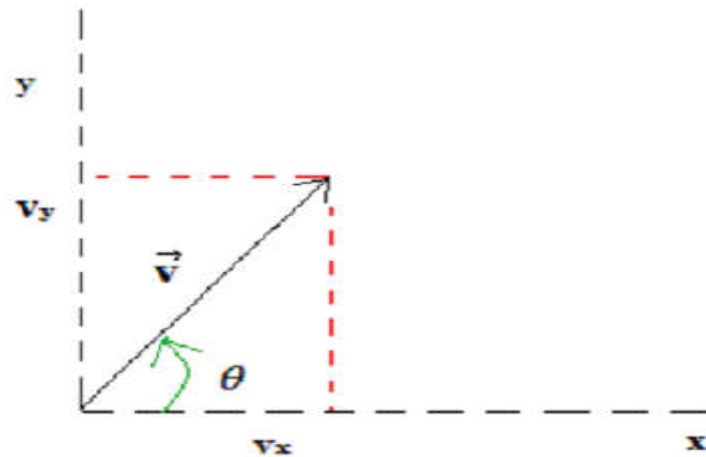


Figura 7: Decomposição da velocidade com a horizontal e vertical de acordo com o ângulo.

Logo,

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \cos \theta(t), \quad (48)$$

cuja integração leva à função  $x(t)$  desejada.

Analogamente,  $\frac{dy}{dt} = v_y = v \sin \theta$ , i.e.

$$\frac{dy}{dt} = v(t) \sin \theta(t), \quad (49)$$

que, quando integrada, leva à  $y(t)$ .

Passamos à tarefa de integrar o sistema (45) para obter  $v(t)$  e  $\theta(t)$ , percebendo que é possível escrever  $v = v(\theta(t))$ , ou seja, vale a regra da derivação implícita

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (50)$$

substituindo (39) do lado esquerdo de (50) e inserindo (44) do lado direito de (50), temos:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta} = \tan\theta + \frac{cv^2}{g \cos\theta}, \quad (51)$$

para integrar essa equação diferencial de  $v(\theta)$  é conveniente reescrevê-la como (TIMOSHENKO e YOUNG, 1948):

$$\frac{dv}{d\theta} \cos\theta + v \frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = \frac{cv^3}{g}, \quad (52)$$

onde reconhecemos a regra da derivação do produto (FLEMMING, 2006). Logo,

$$g \, d(v \cos\theta) = cv^3 \, d\theta. \quad (53)$$

Dividindo (53) por  $v^3$  temos:

$$\frac{d(v \cos\theta)}{(v \cos\theta)^3} = \frac{c}{g} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}, \quad (54)$$

que pode ser integrada membro a membro. Usaremos a condição inicial  $v(\theta_0) = v_0$ . Do lado esquerdo de (54) aparece a integral:

$$I(v \cos\theta) = \int_{v_0 \cos\theta_0}^{v \cos\theta} \frac{dw}{w^3} = \frac{w^{(-3+1)}}{(-3+1)} \Big|_{w=v_0 \cos\theta_0}^{v \cos\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v^2 \cos^2\theta} - \frac{1}{v_0^2 \cos^2\theta_0} \right), \quad (55)$$

onde usamos a definição  $w = v \cos\theta$ . O lado direito de (54) é resolvido pela técnica de integração por partes:

$$I(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} \sec^3\theta \, d\theta = \sec\theta \tan\theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} - \int_{\theta_0}^{\theta} (\sec^3\theta - \sec\theta) \, d\theta \quad (56)$$

A integral de  $\sec^3\theta$  aparece dos dois lados de (56) com sinais opostos. Isolando-a do lado esquerdo e dividindo a equação resultante por dois:

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} + \frac{1}{2} \ln (\sec \theta + \tan \theta) \Big|_{\theta_0}^{\theta}, \quad (57)$$

onde usamos,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \sec \theta d\theta = \ln (\sec \theta + \tan \theta) \Big|_{\theta_0}^{\theta}. \quad (58)$$

Este último resultado pode ser obtido mediante a mudança de variáveis  $u = \sec \theta + \tan \theta$ . A equação (57) pode ser facilmente rescrita como:

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} \right). \quad (59)$$

Substituindo (55) e (59) em (54), obtemos finalmente  $v(\theta)$ :

$$v^2 \cos^2 \theta = \frac{v_0^2}{\frac{1}{\cos^2 \theta_0} + \frac{cv_0^2}{g} \left[ \left( \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} \right) - \left( \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right]} \quad (60)$$

ou seja,

$$v(\theta) = v_0 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_0} + \frac{cv_0^2}{g} \cos^2 \theta \left[ \left( \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} \right) - \left( \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right] \right\}^{-1/2} \quad (61)$$

Substituindo (61) em (44) encontramos a equação diferencial para  $\theta(t)$ ,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g \cos^2 \theta}{v_0} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_0} + \frac{cv_0^2}{g} \left[ \left( \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} \right) - \left( \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right]}, \quad (62)$$

cuja solução não pode ser encontrada analiticamente. Dessa forma, por meio do software *Wolfram Mathematica*, recorremos ao método numérico e encontramos

a solução da equação  $\theta(t)$  dada pela Figura 8. Tomamos  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  e consideramos como condições iniciais  $t(0) = t_0 = 0$ ,  $v(t_0) = v_0 = 10 \text{ m/s}$ ,  $\theta_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ .

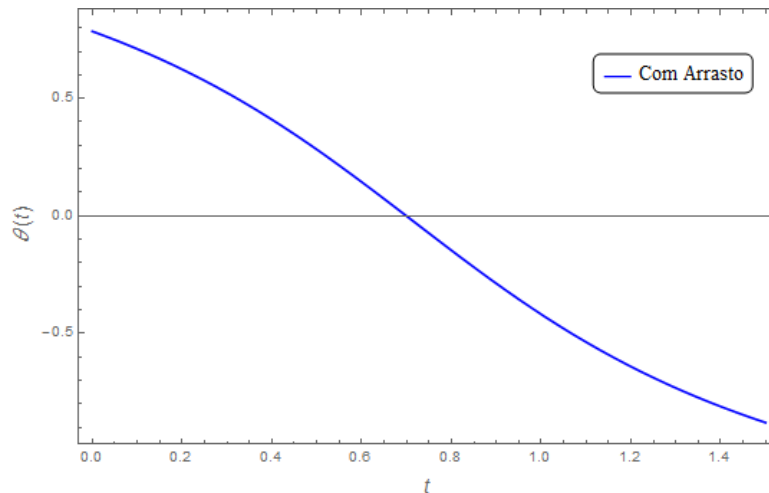


Figura 8: Curva da função  $\theta(t)$  para o movimento oblíquo com arrasto quadrático na velocidade.

Da Figura 8, vemos que  $\theta$  decresce com o tempo para um lançamento oblíquo para cima. Isto é esperado: o ângulo do vetor velocidade com a horizontal varia ao longo da trajetória oblíqua para manter  $v$  sempre tangente à curva descrita pelo corpo. Pela condição inicial imposta, o projétil inicia seu movimento com  $45^\circ$  ( $\pi/4 = 0,79$ ) em relação a horizontal e tende a diminuir este valor até  $0^\circ$ , onde o foguete atinge sua altura máxima e a componente  $y$  da velocidade se anula (o projétil pára de subir), para  $t \approx 0,7 \text{ s}$ . A partir desse instante, o projétil inicia seu movimento de queda, o vetor velocidade aponta na diagonal para baixo, e o ângulo terá valores negativos (pois é contado no sentido anti-horário a partir da horizontal).

O próximo passo é inserir a solução numérica de  $\theta(t)$  na equação diferencial (39) para  $v(t)$ ,

$$\frac{dv}{dt} + cv^2 = -g \sin \theta(t). \quad (63)$$

Esta equação é ordinária (com derivada total, não parcial), não linear ( $v^2$ ) e não homogênea ( $-g \sin \theta$ ). Por não ser possível encontrarmos sua solução analítica,

novamente recorremos ao software *Wolfram Mathematica 10.4*, que nos dá a curva de  $v(t)$  apresentada na Figura 9.

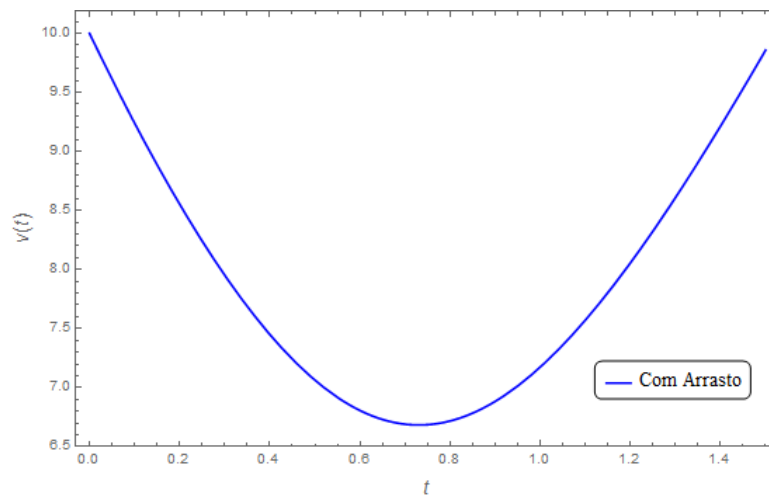


Figura 9: Curva de  $v(t)$  para o movimento oblíquo com força de arrasto quadrática na velocidade.

Na Figura 9 observamos que o foguete inicia seu movimento a uma velocidade  $10 \text{ m/s}$ , em acordo com a condição inicial adotada:  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ . Note que a magnitude da velocidade decresce até o instante  $t = 0,7 \text{ s}$ . Isso é compreensível: até esse instante o projétil está na parte ascendente da trajetória e a componente vertical da velocidade  $v_y$  diminui,<sup>6</sup> levando ao decréscimo de  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . A componente  $v_y$  torna-se zero na altura máxima, onde  $\theta = 0$  e quando  $t = 0,7 \text{ s}$ . A partir daí, o projétil começa a cair, descrevendo a trajetória descendente, na qual  $v_y$  aumenta sob ação da gravidade, levando ao aumento de magnitude de  $v$ .

Substituímos, agora, o resultado para  $v(t)$  da Figura 9 na equação (48),

$$dx = v(t) \cos \theta(t) dt, \quad (64)$$

<sup>6</sup> Não é apenas  $v_y$  que decresce ao longo da curva ascendente. A componente  $v_x$  também diminui devido à desaceleração impressa pela força de arrasto.

e integramos numericamente para obter a função  $x(t)$  exibida na Figura 10. Usamos  $x(t_0) = x_0 = 0$  como condição inicial do processo de integração.

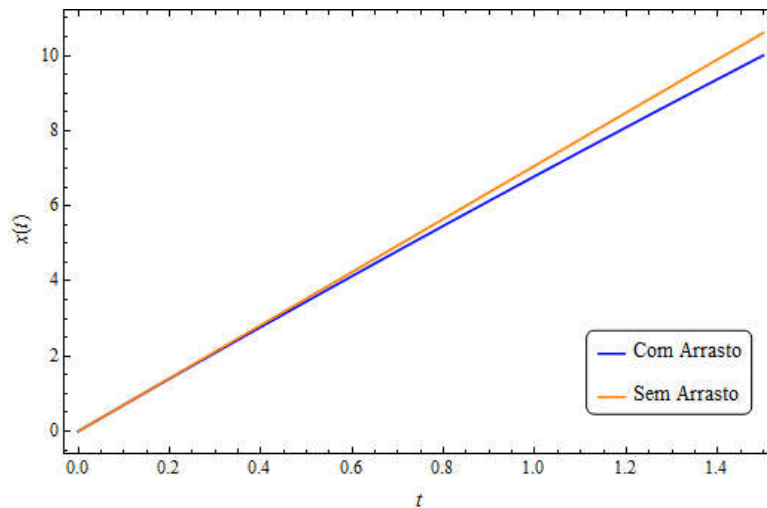


Figura 10: Curva do deslocamento horizontal  $x(t)$  do projétil no movimento oblíquo sob a força de arrasto quadrática na velocidade (curva azul) e do movimento oblíquo sem qualquer força de arrasto (curva laranja).

É observado na Figura 10 que o valor de  $x$  aumenta sempre, o que é esperado para o movimento oblíquo progressivo executado pelo projétil. Para efeito de comparação, a Figura 10 também mostra o gráfico da função  $x(t)$  para o movimento oblíquo sem arrasto, que deve ser uma reta (pois, nesse caso,  $x = x_0 + v_x t$ ). Veja que o valor de  $x$  do caso com arrasto é sempre menor ( $t$  maior que cerca de 0,5 s) ou igual ( $t$  menor que aproximadamente 0,5 s) ao valor de  $x$  para o caso sem arrasto: o alcance do projétil é menor quando uma força resistiva age sobre ele.

O mesmo procedimento é realizado para obter  $y(t)$ , ou seja, vamos substituir  $v(t)$  e  $\theta(t)$  – Figuras 8 e 9 – em (49),

$$dy = v(t) \sin \theta(t) dt \quad (65)$$

e integramos numericamente os membros, resultando na curva de  $y(t)$  da Figura 11.



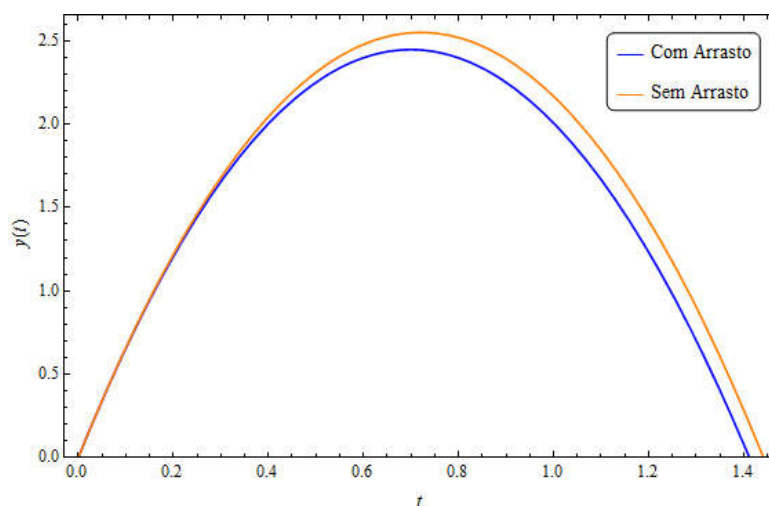


Figura 11: Valores resultantes do método numérico da Equação (65).

A Figura 11 mostra que a altura máxima atingida pelo projétil no caso com arrasto é menor do que a alcançada no movimento oblíquo sem arrasto. De fato, os picos das curvas tem posições verticais distintas.

Por último, usamos as funções representadas nos gráficos das Figuras 10 e 11 para construir os gráficos de trajetórias,  $x$  versus  $y$ , Figura 12.

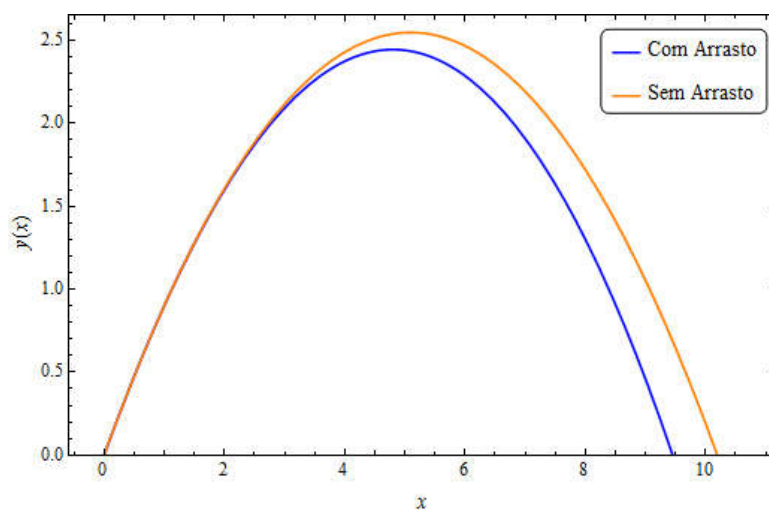


Figura 12: Curvas da trajetória de um projétil para altas velocidades considerando arrasto.

Fazendo uma comparação entre as curvas com arrasto e sem arrasto, Figura 12, vemos que a curva sem arrasto é identificada como uma parábola, conforme a Tabela 1. Ademais, a curva com arrasto é uma “parábola deformada”,

assimétrica em  $x$  e mais achatada em  $y$ , visualizada abaixo da parábola. Isso é válido pois o valor de  $x$  é menor para movimento com arrasto e o valor de  $y$  também (Figuras 9 e 10), uma vez que a força de arrasto influencia no (sentido contrário do) movimento tanto na componente vertical quanto na horizontal.

As trajetórias da Figura 12 (do movimento sem arrasto e do movimento com arrasto sob altas velocidades), podem ser comparadas com as curvas da Figura 2, apresentadas na Seção 2.1, para o movimento com arrasto em baixas velocidades. A Figura 13 executa essa comparação. As condições iniciais para  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  e ângulo  $\theta_0 = 45^\circ$  são as mesmas para todos os tipos de movimento; a constante de arrasto linear em  $v$  é tomada como  $k = 0.04 \text{ s}^{-1}$ ; a constante de arrasto quadrático em  $v$  é escolhida como  $c = 0.01 \text{ m}^{-1}$ .

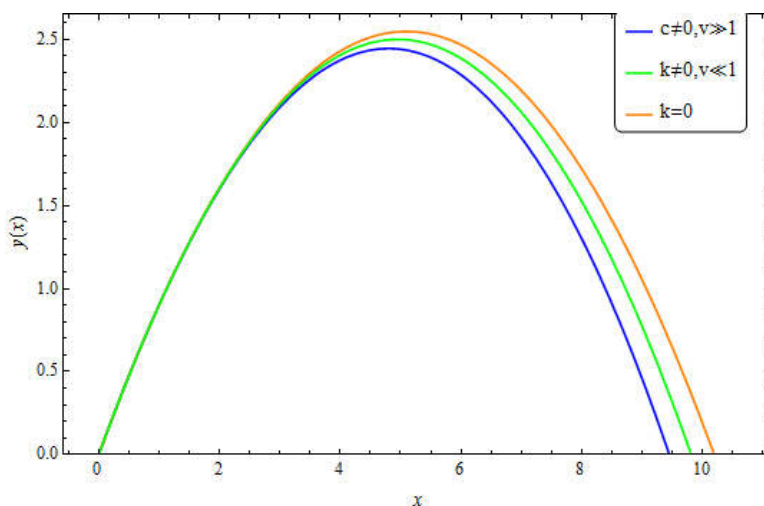


Figura 13: Representação das curvas de trajetória para o movimento de um projétil submetido a um ambiente sem arrasto e com arrasto para baixa velocidade e alta velocidade. As curvas foram construídas usando velocidade inicial  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ , ângulo inicial  $\theta_0 = 45^\circ$ . Nos casos com arrasto foi adotado  $k = 0,04 \text{ s}^{-1}$  para baixas velocidades e  $c = 0,01 \text{ m}^{-1}$  em altas velocidades.

#### 4. Conclusão

Neste trabalho apresentamos os dois tipos possíveis de movimento oblíquo em projéteis com o efeito da força de arrasto, separado para baixas e altas velocidades. Assim realizamos a modelagem analítica e numérica para cada caso, desenvolvendo de maneira explicativa as equações para que o estudo dos movimentos sejam de fácil reprodução pelo leitor.

No movimento de baixas velocidades, foram determinadas as expressões que definem a constante de arrasto e a velocidade inicial do foguete, contando como variáveis o tempo, o alcance, e o ângulo de lançamento. As expressões analíticas para  $k$  e  $v_0$  valem contanto que  $k \ll 1$ . Com isso, fica possível a investigação experimental do valor de  $k$  por um aluno de iniciação científica com uso de foguetes artesanais feitos de garrafa PET (CUZINATTO, et. al., em preparação). Esse é um trabalho em andamento na instituição dos autores deste trabalho, no contexto do PET-Ciência, pela equipe dos *Rocketeers* UNIFAL-MG (CUZINATTO, et al., 2015).

Uma outra aplicação possível para os resultados deste artigo é o estudo do movimento de foguetes à propelente químico, já que estes desenvolvem altas velocidades. Mesmo sendo uma situação mais complexa de se desenvolver experimentalmente, é muito importante em áreas como a aerodinâmica, sendo, portanto, um bom assunto de estudo para alunos de engenharia aeroespacial. Na verdade, já existe, na instituição dos autores deste trabalho, uma equipe fazendo experimentos com foguetes propelidos por um composto de hidróxido de alumínio (PIZZO, et. al., 2015). O presente artigo estabelece firmemente as base teóricas para o estudo do movimento dos foguetes produzidos por essa equipe.

### **Agradecimentos**

Os autores agradecem ao Programa de Educação Tutorial PET-Ciência da UNIFAL-MG pela viabilização do projeto, em especial ao tutor Prof. Dr. Daniel Juliano Pamplona da Silva. AMQ agradece ao apoio financeiro do PET/MEC (Brasil). Os autores são gratos ao MSc. Eduardo Messias de Moraes pela sua colaboração com a modelagem numérica com o programa *Wolfram Mathematica*.

## Referências Bibliográficas

CHUDINOV, P. S.; ELTYSHEV, V.A.; BARYKIN, Yu. A. **Simple analytical description of projectile motion in a medium with quadratic drag force**; Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 7, No. 3, 2013.

CUZINATTO, R. R. et al. **Construindo um foguete de garrafa PET e sua base de lançamento de PVC: o protótipo Rocketeers UNIFAL-MG**. Em preparação.

CUZINATTO, R. R. et al. **Rocketeers UNIFAL-MG: o ensino de física através do lançamento de foguetes artesanais**. Rev. Ciênc. Ext. v.11, n.3, p.40-62, 2015.

FLEMMING, D. M. **Cálculo A. Funções, limite, derivação e integração**. 6 ed. 2006.

PIZZO, M. M.; LOBATO, A. R.; GARDIM, F. G. **Descrevendo Foguete à base de Propelentes Sólidos**. 2015, I Simpósio Integrado UNIFAL-MG.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**, Volume I: Mecânica. 8ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

MARION, J. B.; THORNTON, S. **Classical Dynamics of Particles and Systems**; 5 ed., 2004.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: 1 – Mecânica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2004. 328p., il.

STEWART, J. **Cálculo**; 6 ed.; São Paulo: Cengage Learning, 2010. 2 v.

TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D. H. **Advanced Dynamics**. McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.