

EQUACIONAMENTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ATRAVÉS DA ÁLGEBRA LINEAR E SUAS APLICAÇÕES NA ANÁLISE ESTRUTURAL

FORMULATION OF FINITE ELEMENTS METHOD THROUGH LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS IN STRUCTURAL ANALYSIS

EQUACIONAMIENTO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS A TRAVÉS DEL ÁLGEBRA LINEAR Y SUS APLICACIONES EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Renato Silva Nicoletti¹
Adilson Eduardo Presoto²

96

Resumo: Na análise estrutural, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma solução frente aos limitados métodos analíticos. Com base em fundamentos da Álgebra Linear e da Resistência dos Materiais, equacionou-se o MEF para vigas e aplicou-o na resolução de dois problemas. Contrastando os resultados obtidos pelos métodos, confirmou-se a eficiência do MEF na análise de qualquer estrutura e verificou-se que um software matemático dotado do método seria uma valiosa ferramenta de anteprojeto.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Elementos Finitos. Análise Estrutural.

Abstract: In the structural analysis, the Finite Element Method (MEF) is an alternative to analytical methods. Based on the Theories of Linear Algebra and Resistance of Materials, the MEF was initially formulated for beams and nowadays it is largely used in the engineering. By comparing the results obtained by both methods, the efficiency of the MEF for some structures is verified. We also implement the MEF in a mathematical software supplying an auxiliary tool for engineering drafts.

Keywords: Linear algebra. Finite elements. Structural analysis.

Resumen: En el análisis estructural, el Método de los Elementos Finitos (MEF) es una solución frente a los limitados métodos analíticos. Con base en fundamentos del Álgebra Lineal y de la Resistencia de los Materiales, se ecuacionó el MEF para vigas y lo aplicó en la resolución de dos problemas. En contraste con los resultados obtenidos por los métodos, se confirmó la eficiencia del MEF en el análisis de cualquier estructura y se verificó que un software matemático dotado del método sería una valiosa herramienta de anteproyecto.

Palabras-clave: Álgebra lineal. Elementos Finitos. Análisis estructural.

Envio 29/05/2017

Revisão 01/06/2017

Aceite 09/04/2018

¹ Graduando em Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos. E-mail: renato_nicoletti@hotmail.com.

² Doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas. Professor adjunto no Departamento de Matemática na Universidade Federal de São Carlos. E-mail: presoto@dm.ufscar.br.

Introdução

Nos países em desenvolvimento, como o Brasil, a Engenharia revela-se como fator vital para a ampliação da infraestrutura, para a solução de problemas de ordem econômica e social e para a melhor na qualidade de serviços oferecidos para a sociedade como um todo. De modo geral, a Engenharia anda lado a lado com o desenvolvimento.

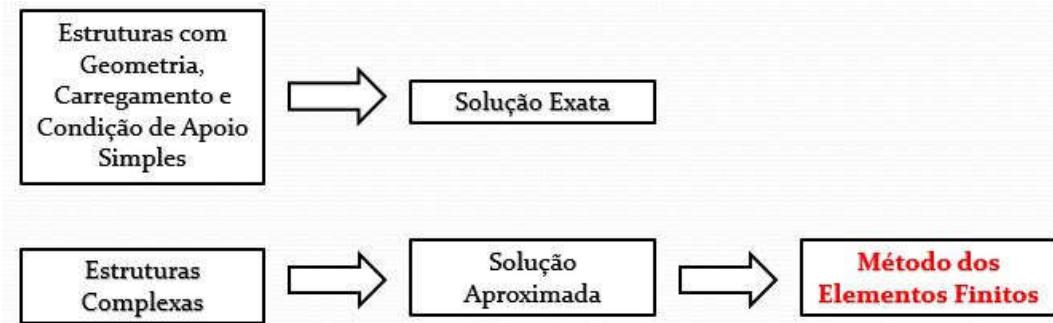
Nesse contexto, o engenheiro civil constitui um importante agente quando se trata de infraestrutura, pois cumpre o papel do principal responsável para gerir projetos e construções de edifícios, portos, túneis, metrôs, barragens, aeroportos, estádios, sempre apresentando soluções inovadoras e tecnológicas que priorizam a qualidade de vida.

Dentre as grandes áreas de estudo da engenharia civil, a engenharia estrutural é o ramo mais importantes em construções, visto que os demais elementos dependem da solidez estrutural da edificação, isto é, de sua estabilidade. O principal objetivo do projeto de uma estrutura é possibilitar que a mesma atenda à sua função de estabilidade sem entrar em colapso e sem deformar ou vibrar de forma excessiva. Dentro destes limites, os quais são precisamente definidos pelas normas técnicas, o engenheiro estrutural busca o melhor uso dos materiais disponíveis concomitantemente com o menor custo possível de construção e manutenção da estrutura.

Os métodos analíticos clássicos possibilitam o cálculo exato dos deslocamentos, deformações e tensões na estrutura em todos os seus pontos, isto é, nos seus infinitos pontos. Mas tais soluções são somente conhecidas para problemas de baixa complexidade, pois se possuímos uma estrutura com mais de 3 esforços desconhecidos, não será possível em geral modelá-la por métodos analíticos pois só ter-se-á 3 equações de equilíbrio.

Dessa forma, desenvolve-se procedimentos aproximados, que são aplicados em caráter geral, não dependendo da forma da estrutura e das condições de carregamento, dentro da precisão aceitável na engenharia. Este caminho alternativo aos procedimentos analíticos clássicos constitui-se no foco central da solução do problema proposto e dará origem ao Método dos Elementos Finitos (MEF). A Figura 01 esquematiza as duas abordagens.

Figura 01: Esquema operacional dos Métodos Clássicos e do Método dos Elementos Finitos.



Ainda nesse contexto, tem-se que as principais etapas do projeto estrutural são:

- Elaboração do esquema estrutural;
- Determinação das cargas atuantes na estrutura;
- Cálculo dos esforços e deformações;
- Verificações quanto à aceitabilidade;
- Dimensionamento dos elementos estruturais;
- Detalhamento do projeto para execução.

98

O presente trabalho visa equacionar o Método dos Elementos Finitos para o cálculo de esforços e deformações em vigas buscando seu consequente dimensionamento, apresentar o software desenvolvido com esse objetivo, resolver aplicações reais do tema com diferentes complexidades e evidenciar o importante papel da Matemática como ferramenta teórica, principalmente da Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Numérico.

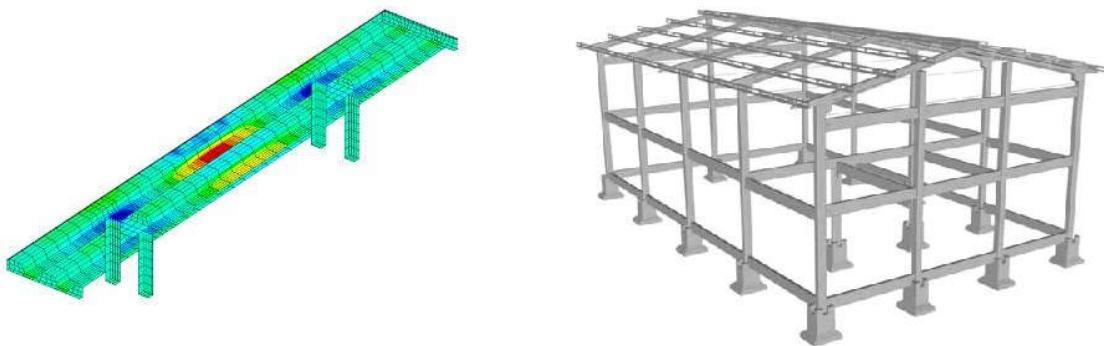
Equacionamento do Problema

Idealização de Sistemas – Modelos Discretizados

Considerando que a compreensão de diversos processos e fenômenos se torna simplificada quando se estuda os mesmos de forma fracionada, torna-se inerente à mente humana querer subdividir os sistemas em seus componentes individuais, ou em seus elementos. Nesse contexto, vem à tona a ideia de que, a partir do entendimento do comportamento de cada elemento entende-se o comportamento do conjunto, independente da complexidade do problema. Em suma, busca-se compreender o todo por meio do entendimento das partes. No

âmbito da engenharia e da ciência, comumente se apropria desta sistematização para a abordagem dos problemas. A Figura 02 apresenta estruturas discretizadas.

Figura 02: Exemplos de sistemas discretizados.



Fonte: EBAH – Método de Elementos Finitos.³

Sistemas Contínuos

99

No cenário em que estamos trabalhamos, define-se o sistema contínuo como aquele que estuda o problema em sua totalidade. Em nosso caso, a Teoria da Flexão de uma Viga foi desenvolvida por E. Winkler (1867), e a Solução Analítica permite determinar o deslocamento vertical v , para todos os valores de x , ou seja, a solução é obtida para todos os pontos da viga, através de uma função matemática modelada com as condições de contorno dadas. Dessa maneira a viga, objeto de análise, é estudada como um Sistema Contínuo, uma vez que a solução é obtida para todos os pontos que constituem o corpo contínuo.

Sistemas Discretos

O tratamento do equilíbrio da estrutura pode ser realizado considerando-a um Sistema Discreto. A ideia da Discretização de Sistema Contínuo leva em conta a divisão da estrutura em um número finito de partes ou elementos, de sorte que a estrutura inteira é modelada por um agregado de estruturas "simples". Denomina-se os pontos de conexão entre os elementos

³ Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAA6IEAA/metodo-elementos-finitos>> Acesso em 23 de fev. 2016.

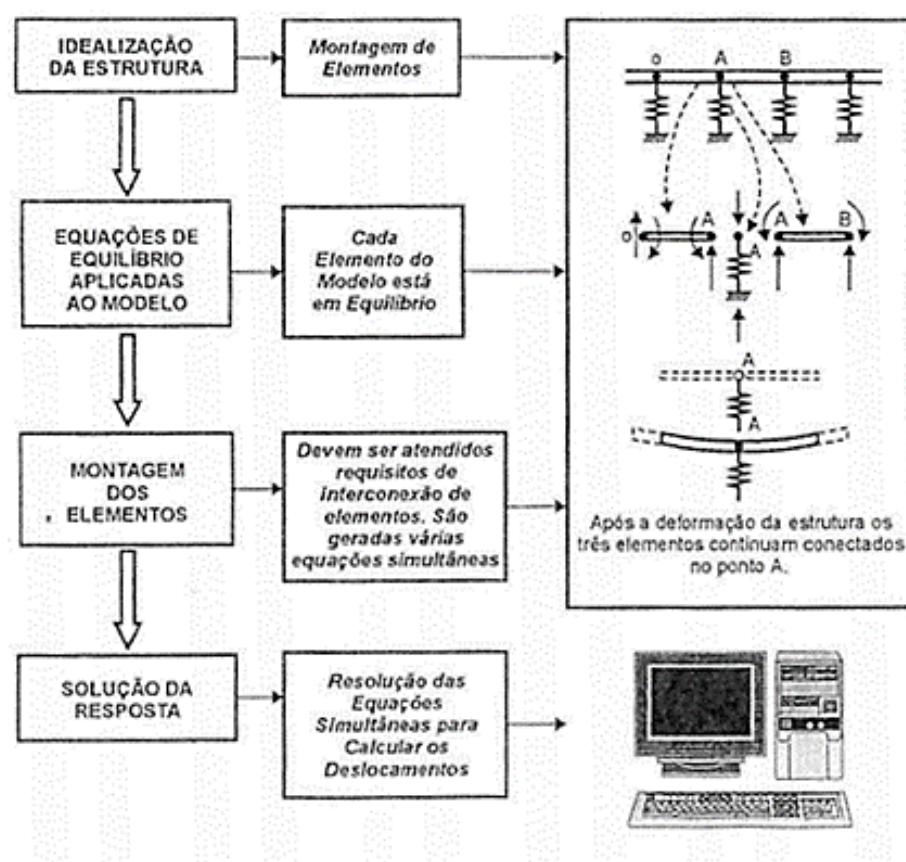
por Nós do Modelo e faz-se importante dizer que são nesses nós em que as forças são aplicadas e os deslocamentos são medidos.

Vale ressaltar que no modelo discretizado, não se busca calcular as deformações nos infinitos pontos da viga, como no caso contínuo. Com a discretização, calcula-se somente as deformações em alguns pontos (chamados de nós do modelo) e julga-se que os mesmos são suficientes para representar adequadamente o deslocamento do sistema inteiro.

Uma das razões pelo qual o Método dos Elementos Finitos obteve sucesso desde o início de seu equacionamento até os dias de hoje é que o seu conceito fundamental, a discretização, acarreta em muitas equações algébricas simultâneas, que são geradas e resolvidas de forma simples com o auxílio de softwares numéricos.

A Figura 03 resume o processo de discretização.

Figura 03: Método comumente empregado para análise de sistemas discretos.



100

Fonte: ALVES, 2003.

Análise Matricial de Estruturas

A Análise Matricial de Estruturas e, em consequência, o Método dos Elementos Finitos possuem como fundamento inicial a relação entre forças e deslocamentos nodais para cada elemento individual. Essa importante ideia está associada ao conceito de Rígidez.

O caso mais simples neste contexto ocorre com molas: a constante elástica da mola, que é a medida d rígidez da mola, é representada através da relação entre a força aplicada e o deslocamento medido na extremidade da mola. Dessa forma, tem-se que $F = k \cdot d$.

De forma análoga ao que ocorre com a mola, acontece em um elemento finito, todavia em caráter mais amplo. Na mola existe apenas o conceito de rígidez axial, pois ela transfere apenas forças axiais. Em uma viga, por sua vez, estão presentes vários componentes de rígidez simultaneamente, como rígidez axial, rígidez a flexão, rígidez à torção e ao cisalhamento e isso fará a relação entre forças e deslocamentos contarem com uma maior complexidade. Contudo, temos de modo geral que a equação (01) governa a análise matricial de estruturas.

101

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{U}] \quad (01)$$

Onde:

$[\mathbf{F}]$ é a matriz com todas as cargas nodais;

$[\mathbf{K}]$ é a Matriz Rígidez da Estrutura que relaciona as forças e os deslocamentos nodais;

$[\mathbf{U}]$ é a matriz coluna com os deslocamentos nodais.

Visto isso, o foco do problema se torna a compreensão e determinação da Matriz Rígidez da Estrutura.

Leis Fundamentais

A elaboração do modelo matemático que representa a estrutura de forma discreta é realizada por meio da aplicação de importantes leis da Mecânica Estrutural. Neste contexto, a estrutura deve satisfazer três postulados.

Lei do Equilíbrio de Forças

Levando em conta a condição de equilíbrio da estrutura, podemos aplicar as Equações de Equilíbrio advindas da Mecânica, equação (02), a cada um dos elementos isoladamente. De forma semelhante, tais equações podem ser aplicadas para cada elemento, sendo que, se os elementos estão em equilíbrio, a estrutura como um todo também estaria.

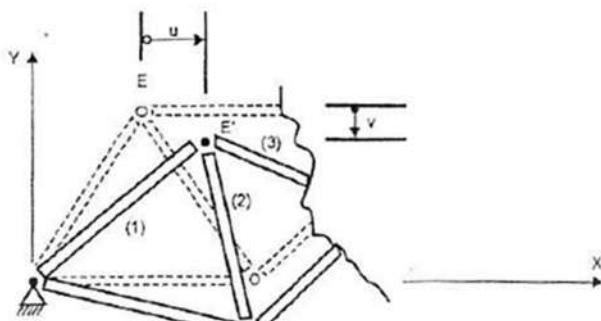
$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad i = x, y, z \quad (02)$$

Lei da Compatibilidade de Deslocamentos

Impõe que todas as extremidades de elementos conectadas a um mesmo nó, estão sujeitos aos mesmos componentes de deslocamentos, ou seja, a estrutura não "abre". A Figura 04 ilustra essa ideia.

102

Figura 04: Treliça deformada com compatibilidade de deslocamentos mantida.



Fonte: ALVES, 2003.

Lei de Comportamento do Material

Quando se transmite esforços ao longo da estrutura, a mesma se deforma em virtude das forças internas. Na maioria das aplicações práticas, os esforços internos crescem proporcionalmente as deformações. Esta relação linear, comum no estudo da resistência dos materiais, constitui a conhecida Lei de Hooke. No estudo do Método dos Elementos Finitos admite-se que os elementos respeitam essa condição. Desta forma, segundo a Resistência dos

Materiais, utiliza-se as equações (03), (04) e (05) para a determinação da Matriz Rigidez do Elemento de Viga.

$$F = K \quad U \quad (03)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (04)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{E \quad I_x} \quad (05)$$

Cada um dos parâmetros envolvidos em tais equações será explicado de forma detalhada neste momento.

Momento de Inércia

O momento de inércia de área I , conhecido também como segundo momento de área ou segundo momento de inércia é uma propriedade geométrica da seção transversal de elementos estruturais. Fisicamente, o momento de inércia está relacionado com as tensões e deformações que aparecem por flexão em elementos estruturais e junto com as propriedades do material determina a resistência do elemento sob flexão.

103

Define-se o momento de inércia de área pela integral do produto dos elementos de área de uma figura plana pelo quadrado de suas distâncias a um eixo, ou seja, dividimos a área em questão em partes infinitesimais e fazemos um somatório da multiplicação dessas áreas pelo quadrado de suas distâncias. Isso está representado pela equação (06).

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (06)$$

Geralmente trabalha-se com vigas de seção retangular, ou de composição de seções retangulares. Sabendo disso e aplicando a equação (06) para uma área retangular de lados b e h (vide Figura 05), com o eixo passando pelo seu centro, e paralelo ao lado b , obtém-se a equação (07).

$$I_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \right) dx$$

$$I_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{1}{12} \right) dx$$

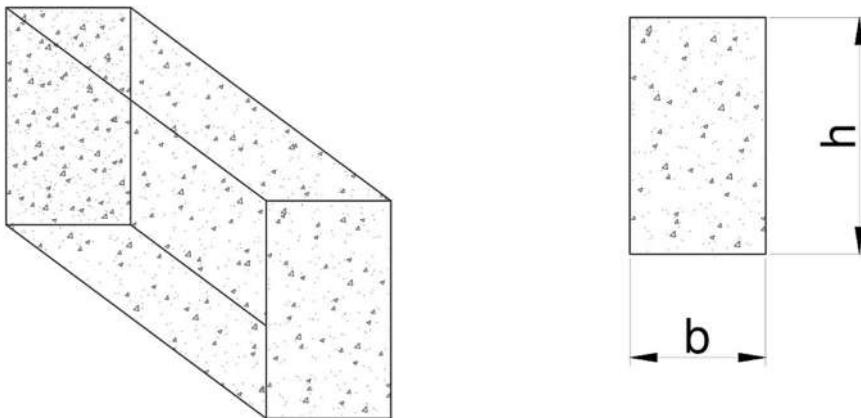
$$I_x = \frac{1}{12} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx$$

$$I_x = \frac{1}{12} \left(\frac{b}{2} \quad \left(-\frac{b}{2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (07)$$

Figura 05: Viga com seção transversal retangular.

104



A Tabela 01 mostra valores do Momento de Inércia para outros tipos de seções.

Tabela 01: Valores do Momento de Inércia para outras seções planas.

Forma da seção	Momento de Inércia no centroide
Triangular	$\frac{b^3}{36}$
Círculo	$\frac{\pi r^4}{4}$
Semicírculo	$\frac{\pi r^4}{8}$
Quadrante	$\frac{\pi r^4}{16}$

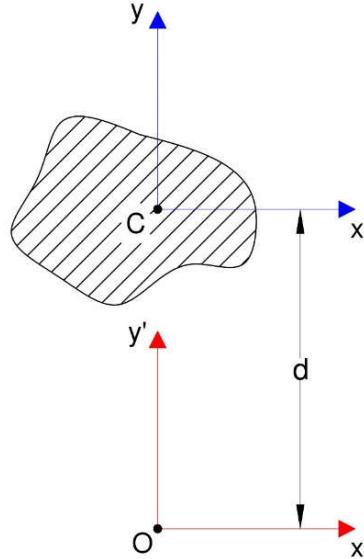
Quando se lida com seções que são composições das figuras planas básicas (como uma seção I, que é composta de três retângulos), faz-se necessário utilizar o **Teorema de Steiner**, exibido abaixo, para obter o valor do Momento de Inércia no centroide da peça.

105

Teorema de Steiner

O Teorema de Steiner, também conhecido como Teorema dos Eixos Paralelos, constitui uma ferramenta matemática que possibilita o cálculo do momento de inércia em pontos fora do centroide, o que se torna útil quando trabalha-se com seções compostas de mais de uma figura plana básica. Deste modo, suponha que busca-se calcular o momento de inércia em um ponto O em relação ao eixo x' que está fora do centroide de uma determinada seção. A Figura 06 ilustra essa situação.

Figura 06: Cálculo do Momento de Inércia em relação à um novo eixo.



Assim, o momento de inércia em relação ao eixo x , passando sobre o centroide, é, por definição: 106

$$I_{x_C} = \int_A (x^2 + y^2) dA$$

O momento de inércia relativo ao novo eixo (x'), que dista d entre o centróide e o eixo x , é:

$$I'_{x_O} = \int_A ((x - d)^2 + y^2) dA$$

Expandindo o quadrado dentro da integral, vem que:

$$I'_{x_O} = \int_A (x^2 - 2x d + d^2 + y^2) dA = \int_A (x^2 + y^2) dA + d^2 \int_A dA - 2d \int_A x dA$$

Por definição, o primeiro termo é o I_c , o segundo resulta em $A \cdot d^2$ e o terceiro se anula uma vez que o centroide está localizado na origem. Deste modo, demonstra-se o Teorema dos Eixos Paralelos - (08).

$$I_{x'_0} = I_{x_c} + A \cdot d^2 \quad (08)$$

Módulo de Elasticidade Longitudinal do Material

O Módulo de Elasticidade E , também conhecido como Módulo de Young, é uma constante mecânica intrínseca dos materiais, dependente da composição química, da microestrutura e de defeitos que fornece uma medida da rigidez de um material sólido. Trata-se de um parâmetro muito importante para a aplicação de materiais pois está associado com a descrição de várias outras propriedades mecânicas. Sua aferição se dá em laboratório por meio da razão entre a tensão exercida em um material e a deformação sofrida pelo mesmo - Equação (09).

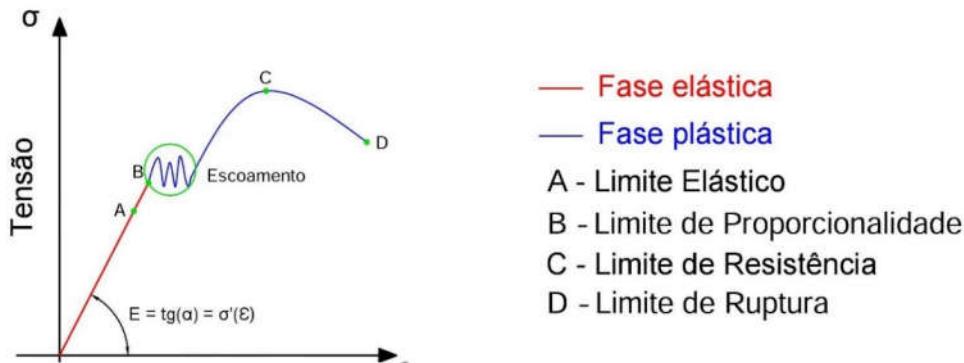
107

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (09)$$

Para efeitos de ilustração, imagine uma borracha e um metal, ambos submetidos a uma mesma tensão. Verifica-se uma deformação elástica muito superior na borracha quando comparada ao metal. Tal fato revela que o Módulo de Elasticidade Longitudinal do metal é mais alto que o da borracha e, desta forma, se requer a aplicação de uma tensão maior para que ele sofra a mesma deformação verificada na borracha.

A Figura 07 apresenta um resultado típico de um Ensaio Tensão x Deformação, no qual se afere o valor de E . Note que até o denominado Limite de Proporcionalidade (que geralmente é adotado para projetos buscando a segurança) $E = \tan(\alpha) = \sigma'(\epsilon)$.

Figura 07: Diagrama de um Ensaio Tensão x Deformação.



O Módulo de Elasticidade é medido em unidades de pressão (no geral Pa ou $\frac{N}{m^2}$). Alguns valores típicos do Módulo de Young para diferentes materiais estão expostos na Tabela 02.

Tabela 02: Valores típicos do Módulo de Elasticidade para diferentes Materiais.

108

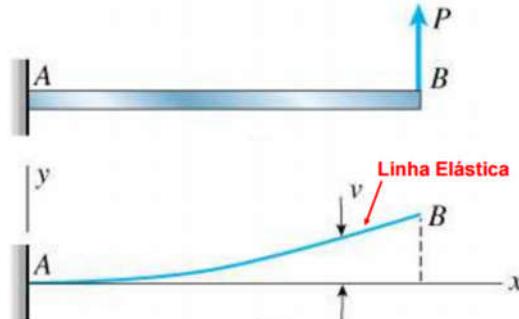
Material	Módulo de Elasticidade [GPa]
Diamante	1000
Tungstênio	406
Aços de Baixa Liga	200
Ferro	196
Alumínio	69
Vidro	69
Concreto	25
Nylon	2-4

Fonte: CIMM - Centro de Informação Metal Mecânica.

Equação Diferencial da Linha Elástica

Por definição, Linha Elástica é a curva que representa o eixo da viga após a deformação. A Figura 08 mostra a linha elástica em um caso real de viga. Nesta, a deflexão v é o deslocamento de qualquer ponto no eixo da viga.

Figura 08: Linha elástica de uma viga com a aplicação de uma carga vertical P .

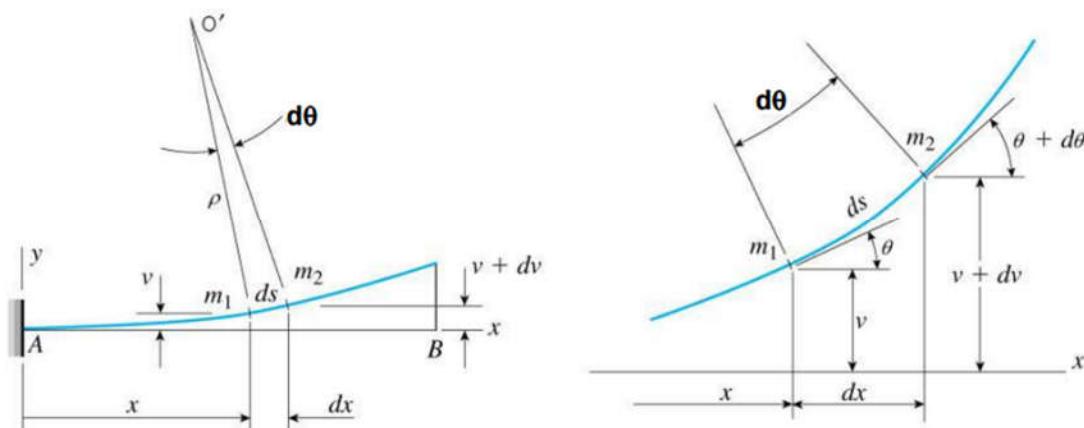


Fonte: VANDERLEI, 2009.

No momento em que a viga é flexionada, em cada ponto ao longo do eixo x ocorrem uma deflexão (v) e uma rotação (θ). Esta rotação é o ângulo entre o eixo x e a tangente à curva da linha elástica. A Figura 09 exibe tais variáveis.

Figura 09: Análise diferencial da linha elástica.

109



Fonte: VANDERLEI, 2009.

Observando a Figura 09, obtemos que:

$$\rho \cdot d\theta = ds \Rightarrow k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds},$$

, $d\theta$ em radianos.

Ainda observando a Figura 09, encontra-se a Equação da Inclinação da Linha Elástica – Equação (10).

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \quad (10)$$

Daí da equação (10), tira-se que:

- $\theta = \arctan\left(\frac{dv}{dx}\right)$;
- $\cos \theta = \frac{dx}{ds}$;
- $\sin \theta = \frac{dv}{ds}$.

Visto que uma estrutura apresentará pequenos ângulos de rotação, obtém-se as equações (11) e (12). 110

$$ds \approx dx \Rightarrow k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (11)$$

$$\tan \theta \approx \theta \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \theta \quad (12)$$

Derivando a equação (11) em relação a x e igualando a mesma com a equação (12), encontra-se a equação (13). Vale ressaltar que essa última equação é válida somente para pequenas rotações.

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (13)$$

Ademais, para materiais elástico lineares, é válida a Lei de Hooke - equação (14).

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \text{e} \quad \varepsilon_x = \frac{1}{\rho} y = k y \quad (14)$$

Além disso, a equação (15), fornece a definição de Momento:

$$M = \int_A \sigma_x \, dA \, y \quad (15)$$

Relacionando as equações (14) e (15), encontra-se a equação (16).

$$\begin{aligned} M &= \int_A E \, (k \, y) \, y \, dA \\ \Rightarrow M &= E \, k \, \int_A y^2 \, dA \Rightarrow M = E \, k \, I_x \\ \therefore k &= \frac{M}{E \, I_x} \end{aligned} \quad (16)$$

111

Por fim, substituindo a equação (16) na equação (13), chegamos finalmente na equação (17).

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E \, I_x} \quad (17)$$

A equação (17) é a famosa Equação Diferencial da Linha Elástica.

Matriz de Rigidez do Elemento de Viga

O modo como todas as forças e deslocamentos de um elemento finito de viga se relaciona é expresso pela Matriz Rigidez do Elemento $[K]^e$.

Considerando as condições para que seja possível realizar a multiplicação de duas matrizes e sabendo que a matriz de forças nodais possui quatro linhas assim como a matriz de deslocamentos, conclui-se que a Matriz de Rigidez de Viga, com somente rigidez a flexão, deve ter dimensão 4×4 . Assim, resulta que:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Portanto, o problema consiste basicamente em determinar quais são os coeficientes k_{ij} da Matriz Rígidez do Elemento de Viga. Dá ideia de discretização, tem-se que os termos da matriz de rigidez do elemento finito representam relações de causa e efeito. Neste contexto, a causa é um deslocamento unitário imposto em um grau de liberdade, e os efeitos são forças que surgem nos graus de liberdade do elemento devido a esse deslocamento.

Visto isso, o coeficiente k_{ij} da Matriz de Rígidez de um Elemento Finito representa a força no grau de liberdade i devido ao deslocamento unitário imposto ao grau de liberdade j , mantendo-se os outros graus de liberdade bloqueados, ou seja, discretizando o sistema.

Pode-se então determinar os coeficientes da Matriz de Rígidez do Elemento de Viga, impondo deslocamento unitários isoladamente nos graus de liberdade e avaliando as forças que aparecem nos graus de liberdade do elemento.

Todo esse procedimento é resumido pela Figura 10.

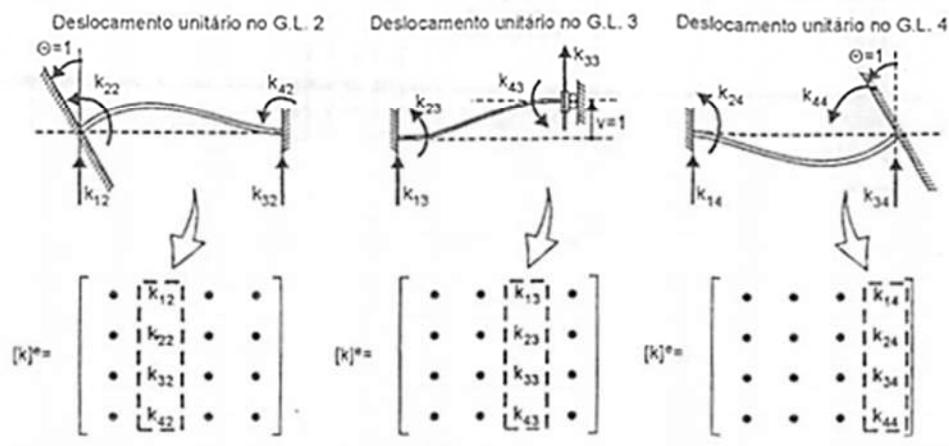
Figura 10: Resumo do procedimento para determinar os coeficientes da Matriz de Rígidez do Elemento de Viga.



Graus de Liberdade (G.L.) do Elemento da Viga com apenas Rígidez à Flexão.



Analogicamente, teremos para os outros Graus de Liberdade:



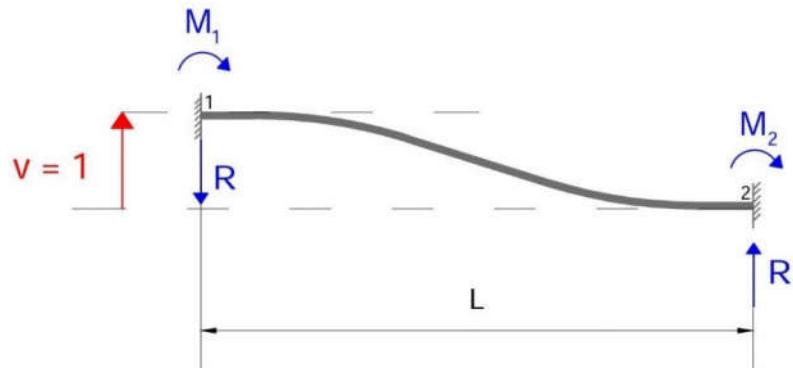
113

Fonte: ALVES, 2003.

- Para: $v_1 = 1$

A Figura 11 exibe a viga esquematizada nessa situação.

Figura 11: Viga com deslocamento vertical unitário imposto no nó 1.



Fazendo um somatório de momentos no ponto 1, chega-se a equação (18).

$$\sum_1 M_i \Rightarrow M_1 + M_2 = RL \quad (18) \quad 114$$

Realizando o somatório de momento em um ponto x qualquer, encontra-se a equação (19).

$$\sum_x M_i \Rightarrow M = M_1 + Rx \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dx} &= \theta(x) = \frac{1}{EI} \times \left(M_1 x + \frac{Rx^2}{2} + c_1 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{EI} \times \left(\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{Rx^3}{6} + c_1 x + c_2 \right) \quad (21)$$

Sabendo que $\theta(0) = 0$, da equação (20), tira-se que $c_1 = 0$.

Agora, dado que $v(0) = 1$, na equação (21), obtém-se que a equação (22).

$$\frac{c_2}{EI} = 1 \quad (22)$$

Tendo ainda que $v(L) = 0$, na equação (21), encontra-se que a equação (23).

$$c_2 = \frac{M_1 L^2}{2} - \frac{R L^3}{6} \quad (23)$$

Substituindo a equação (22) na (23), obtém-se a equação (24).

$$\frac{1}{EI} \times \left(\frac{M_1 L^2}{2} - \frac{R L^3}{6} \right) = 1 \quad (24)$$

Por simetria $M_1 = M_2$, daí, da equação (18), chega-se a relação (25).

115

$$M_1 = \frac{R L}{2} \quad (25)$$

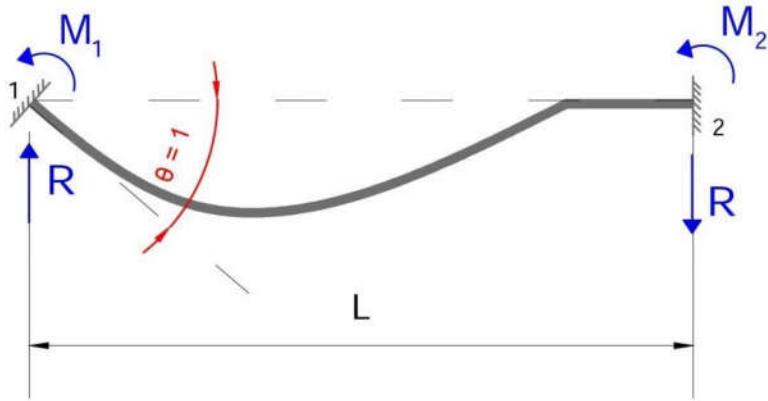
Substituindo a equação (25) na (24), encontra-se que:

$$R_1 = R_2 = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{e} \quad M_1 = M_2 = \frac{6EI}{L^2}$$

- Para: $\theta_1 = 1$

A Figura 12 mostra a viga esquematizada nessa condição.

Figura 12: Viga com rotação unitária imposta no nó 1.



Fazendo um somatório de momentos no ponto 1, chega-se a equação (26).

$$\sum_2 M_i \Rightarrow M_1 + M_2 = RL \quad (26)$$

116

Realizando o somatório de momento em um ponto x qualquer, encontra-se a equação (27).

$$\sum_x M_i \Rightarrow M = M_1 + Rx \quad (27)$$

Da Equação Diferencial da Linha Elástica, equação (17), tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dx} &= \theta(x) = \frac{1}{EI} \times \left(M_1 x + \frac{Rx^2}{2} + c_1 \right) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{EI} \times \left(\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{Rx^3}{6} + c_1 x + c_2 \right) \quad (29)$$

Sabendo que $\theta(0) = 1$, da equação (28), tira-se que a equação (30).

$$\frac{c_1}{EI} = 1 \quad (30)$$

Agora, dado que $v(0) = 0$, na equação (29), obtém-se que $c_2 = 0$.

Dado ainda que $v(L) = 0$, na equação (29), encontra-se que:

$$c_1 = \frac{M_1 L}{2} - \frac{R L^2}{6} \quad (31)$$

Substituindo a equação (31) na (30), obtém-se a equação (32).

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{M_1 L}{2} - \frac{R L^2}{6} \right) = 1 \quad (32)$$

117

Ademais, tendo que $\theta(L) = 0$, na equação (28), encontra-se que a equação (33).

$$c_1 = M_1 L - \frac{R L^2}{2} \quad (33)$$

Substituindo a equação (33) na (30), obtém-se a equação (34).

$$\frac{1}{EI} \left(M_1 L - \frac{R L^2}{2} \right) = 1 \quad (34)$$

Relacionando as equações (34) e (26), chega-se finalmente que:

$$M_1 = \frac{4EI}{L}; \quad M_2 = \frac{2EI}{L} \quad \text{e} \quad R_1 = R_2 = \frac{6EI}{L^2}$$

As demais colunas são iguais as duas realizadas a menos de sentidos.

Portanto, em nosso problema, a relação entre as forças e deslocamentos nodais para o elemento de viga com somente rigidez à flexão, é dada pela equação (35).

$$\begin{array}{cccccc}
 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \\
 f_1 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & v_1 \\
 M_1 = (E \ I) \times & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \times \theta_1 \\
 f_2 & \frac{6}{L^3} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & v_2 \\
 M_2 & \frac{6}{L^2} & \frac{L}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{L}{L} & \theta_2
 \end{array} \quad (35)$$

onde:

- f_i é a força concentrada atuante no nó i ;
- M_i é o momento fletor atuante no nó i ;
- v_i é o deslocamento vertical no nó i ;
- θ_i é a rotação em relação ao eixo no nó i ;
- L é o comprimento do vão da viga.

118

Aplicações

Com o intuito de exemplificar o uso do MEF, serão resolvidos dois exemplos utilizando-o. No primeiro, trabalhar-se-á com uma viga com apenas um elemento e no segundo com uma viga constituída por dois elementos.

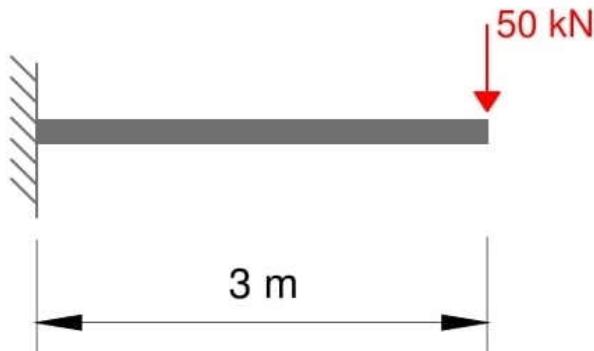
Exemplo 1

Deseja-se calcular o deslocamento vertical e a rotação na extremidade de uma viga em balanço produzida em virtude da aplicação de uma carga de 50kN (cinco toneladas) também na extremidade. Para tanto, considerar-se-á uma viga com as seguintes características:

- **Material:** Concreto;
- **Vão:** 3 metros;
- **Seção Transversal:** Retangular (40 cm x 60 cm).

A Figura 13 mostra um esquema do problema.

Figura 13: Viga em balanço com carga de 5 toneladas na extremidade livre.



Resolução: Dado que o material constituinte da viga é concreto, tem-se que:

$$E = 2,5 \cdot 10^7 \frac{kN}{m^2}$$

119

Ademais, pelo fato da seção ser retangular medindo 40 cm x 60 cm, vem, pela equação (07), que:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,4 \cdot 0,6^3}{12} \Rightarrow I = 0,0072 \text{ m}^4$$

Discretizando e observando os nós, obtém-se que:

- $L = 3 \text{ m}$;
- $f_2 = 50 \text{ kN}$;
- $M_2 = 0$.

A Figura 14 exibe o problema em questão discretizado em um elemento.

Figura 14: Viga do problema proposto discretizada.



Além disso, vale dizer que os valores de f_1 e M_1 são a força e o momento de reação no engaste, respectivamente. Assim, substituindo tais valores na equação (35), chega-se que ao sistema de equações (36).

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right) \cdot 0,0072 \text{ m}^4 \times \begin{bmatrix} \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} & \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} \\ \frac{6}{3^2} & \frac{4}{3} & \frac{6}{3^2} & \frac{2}{3} \\ \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} & \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} \\ \frac{6}{3^2} & \frac{2}{3} & \frac{6}{3^2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad 120$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,8 \cdot 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,444 & 0,666 & 0,444 & 0,666 \\ 0,666 & 1,333 & 0,666 & 0,666 \\ 0,444 & 0,666 & 0,444 & 0,666 \\ 0,666 & 0,666 & 0,666 & 1,333 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Dado que o deslocamento e a rotação no primeiro nó, v_1 e θ_1 , são nulos pelo fato da extremidade estar engastada, chega-se no sistema de equações (37).

$$1,8 \cdot 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,444 & 0,666 \\ 0,666 & 1,333 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Fazendo $L'_2 = \frac{0,444}{0,666} \cdot L_2 + L_1$ obtemos o sistema de equações (38).

$$1,8 \cdot 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,444 & 0,666 \\ 0 & 0,223 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Através das equações (38), encontra-se o valor da rotação no nó 2, θ_2 .

$$\begin{aligned} 1,8 \cdot 10^5 \cdot 0,223 \cdot \theta_2 &= 50 \\ \Rightarrow \theta_2 &= 1,250 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (\text{sentido horário})^4 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de θ_2 , no sistema de equações (38), obtemos o valor de v_2 .

$$\begin{aligned} 1,8 \cdot 10^5 \cdot (0,444 \cdot v_2 - 0,666 \cdot (1,250 \cdot 10^{-3})) &= 50 \\ \Rightarrow v_2 &= 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,49 \text{ mm} \quad (\text{para baixo})^5 \end{aligned}$$

121

Por fim, vale mencionar que é possível ainda calcular os valores da reação (f_1) e do momento (M_1) no nó 1.

Substituindo os valores encontrados no sistema de equações (36) encontra-se os valores dos esforços no engaste:

$$\begin{cases} f_1 = 1,8 \cdot 10^5 \cdot (0,444 \cdot (2,49 \cdot 10^{-3}) + 0,666 \cdot (1,250 \cdot 10^{-3})) \\ M_1 = 1,8 \cdot 10^5 \cdot (0,666 \cdot (2,49 \cdot 10^{-3}) + 0,666 \cdot (1,250 \cdot 10^{-3})) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 = 50 \text{ kN} \\ M_1 = 150 \text{ kN.m} \end{cases}$$

⁴ O método foi equacionado considerando a rotação no sentido anti-horário como positiva.

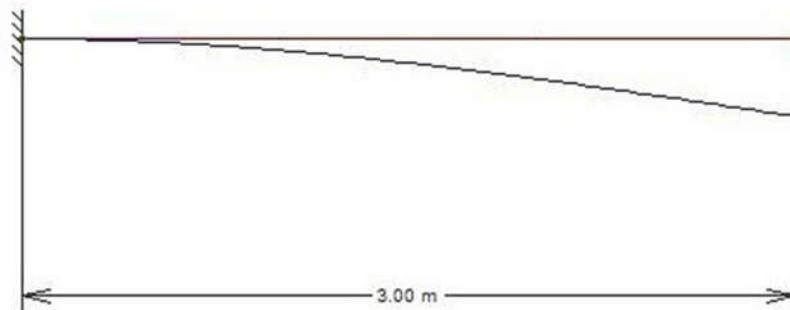
⁵ O método foi equacionado levando em conta o deslocamento positivo para cima.

Comparação com o software estrutural Ftool

Utilizando o Software Ftool (versão educacional 3.01), um programa gráfico-interativo para ensino de comportamento de estruturas, modelou-se a viga em balanço do exemplo 1 para verificar os valores dos deslocamentos calculados pelo software e comparar com os valores de nosso equacionamento. A Figura 15 apresenta os resultados encontrados.

Figura 15: Resolução da viga do exemplo 1 pelo Ftool.

Displ./rotat. at local pos.: x = 3.00 m L = 3.00 m - Dx: 0.000e+000 mm Dy: -2.500e+000 mm Rz: -1.250e-003 rad



122

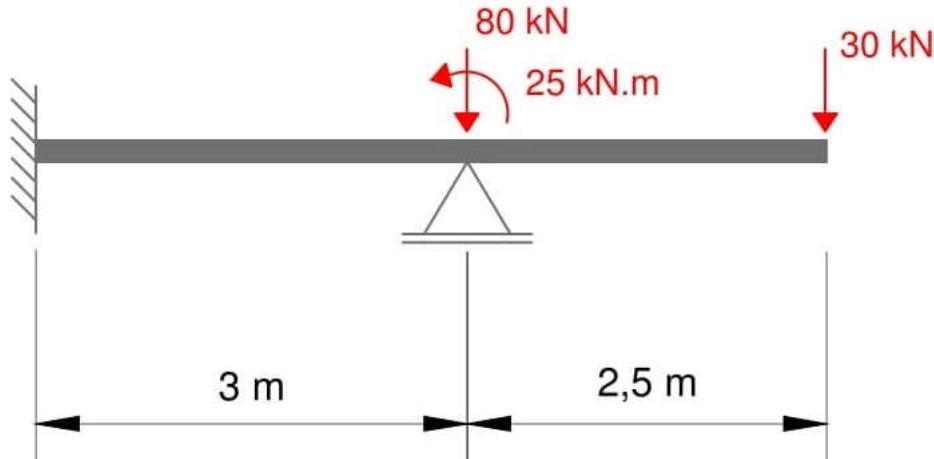
Fonte: Ftool.

Observando a figura, constata-se que os valores encontrados por ambos os métodos concordam em sua totalidade. Assim, corrobora-se a eficiência do Método dos Elementos Finitos.

Exemplo 2

Pretende-se calcular a rotação e o deslocamento vertical na extremidade livre bem como a rotação no apoio móvel, produzidos em virtude de uma série de esforços. A Figura 16 mostra a viga a ser resolvida.

Figura 16: Viga objeto de estudo do exemplo 2.



Conjeturamos uma viga com as seguintes características:

123

- **Material:** Concreto;
- **Vão:** 5,5 metros;
- **Seção Transversal:** Retangular (30 cm x 50 cm).

Resolução: Dado que o material constituinte da viga é o concreto, tem-se que:

$$E = 2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Daí, pela equação (07), calcula-se o momento de inércia para a seção do presente problema.

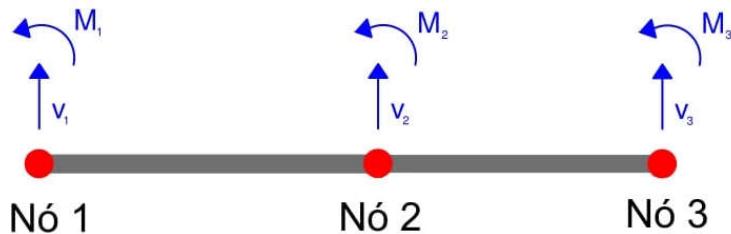
$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,5^3}{12} \Rightarrow I = 0,003125 \text{ m}^4$$

Discretizando e observando os nós, encontra-se que:

- $L_1 = 3 \text{ m};$
- $L_2 = 2,5 \text{ m};$
- $f_2 = 80 \text{ kN};$
- $M_2 = 25 \text{ kN m};$
- $f_3 = 30 \text{ kN};$
- $M_3 = 0.$

A Figura 17 apresenta a discretização da viga objeto de estudo deste problema.

Figura 17: Viga do exemplo 2 discretizada.



124

Por trata-se de uma estrutura com dois elementos, utilizaremos os conceitos da discretização, ou seja, calcularemos a Matriz de Rigidez para cada elemento para, em seguida, monta a Matriz de Rigidez da Estrutura e calcular as deformações. Assim, para o primeiro elemento temos a seguinte Matriz de Rigidez – equação (39).

$$[k]_1 = \left(2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right) \cdot 0,003125 \text{ m}^4 \times \begin{matrix} \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} & \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} \\ \frac{6}{3^2} & \frac{4}{3} & \frac{6}{3^2} & \frac{2}{3} \\ \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} & \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} \\ \frac{6}{3^2} & \frac{2}{3} & \frac{6}{3^2} & \frac{4}{3} \end{matrix} \quad (39)$$

Analogamente, para o segundo elemento, temos a matriz representada na equação (40).

$$[k]_2 = \left(2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right) \cdot 0,003125 \text{ m}^4 \times \begin{bmatrix} \frac{12}{2,5^3} & \frac{6}{2,5^2} & \frac{12}{2,5^3} & \frac{6}{2,5^2} \\ \frac{6}{2,5^2} & \frac{4}{2,5} & \frac{6}{2,5^2} & \frac{2}{2,5} \\ \frac{12}{2,5^3} & \frac{6}{2,5^2} & \frac{12}{2,5^3} & \frac{6}{2,5^2} \\ \frac{6}{2,5^2} & \frac{2}{2,5} & \frac{6}{2,5^2} & \frac{4}{2,5} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Pelo fato da estrutura possuir 3 nós, teremos 6 possíveis deformações e, portanto, a Matriz de Rígidez da Estrutura será quadrada de dimensão 6 – equação (41).

$$[K]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [k_1] & 0 \\ 0 & [k_2] \end{bmatrix} \quad (41)$$

125

Relacionando as equações (39) e (40) com a equação (41), encontra-se finalmente a Matriz de Rígidez da Estrutura - equação (42).

$$[K]_{6 \times 6} = 78125 \times \begin{bmatrix} \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} & \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} & 0 & 0 \\ \frac{6}{3^2} & \frac{4}{3} & \frac{6}{3^2} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{12}{3^3} & \frac{6}{3^2} & \frac{12}{3^3} + \frac{12}{2,5^3} & \frac{6}{3^2} + \frac{6}{2,5^2} & \frac{12}{2,5^3} & \frac{6}{2,5^2} \\ \frac{6}{3^2} & \frac{2}{3} & \frac{6}{3^2} + \frac{6}{2,5^2} & \frac{4}{3} + \frac{4}{2,5} & \frac{6}{2,5^2} & \frac{2}{2,5} \\ 0 & 0 & \frac{12}{2,5^2} & \frac{6}{2,5^2} & \frac{12}{2,5^3} & \frac{6}{2,5^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{2,5^2} & \frac{2}{2,5} & \frac{6}{2,5^2} & \frac{4}{2,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & 0,444 & 0,666 & 0,444 & 0,666 & 0 & 0 \\
 [K]_{6x6} = 78125 \times & 0,666 & 1,333 & 0,666 & 0,666 & 0 & 0 \\
 & 0,444 & 0,666 & 1,212 & 0,293 & 0,768 & 0,960 \\
 & 0,666 & 0,666 & 0,293 & 2,933 & 0,960 & 0,800 \\
 & 0 & 0 & 0,768 & 0,960 & 0,768 & 0,960 \\
 & 0 & 0 & 0,960 & 0,800 & 0,960 & 1,600 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Substituindo a equação (42) na equação que governa a análise matricial de estruturas:

$$\begin{bmatrix} f_1 & 0,444 & 0,666 & 0,444 & 0,666 & 0 & 0 & v_1 \\
 M_1 & 0,666 & 1,333 & 0,666 & 0,666 & 0 & 0 & \theta_1 \\
 f_2 & 0,444 & 0,666 & 1,212 & 0,293 & 0,768 & 0,960 & v_2 \\
 M_2 = 78125 \times & 0,666 & 0,666 & 0,293 & 2,933 & 0,960 & 0,800 & \times \theta_2 \\
 f_3 & 0 & 0 & 0,768 & 0,960 & 0,768 & 0,960 & v_3 \\
 M_3 & 0 & 0 & 0,960 & 0,800 & 0,960 & 1,600 & \theta_3 \end{bmatrix} \quad 126$$

Uma vez que o nó 1 está engastado e o nó 2 está sobre um apoio móvel, têm-se que os valores de v_1, θ_1 e v_2 são nulos. Substituindo-os adjuntos dos valores dos esforços dados no problema, obtém-se que a equação (43).

$$\begin{bmatrix} f_1 & 0,444 & 0,666 & 0,444 & 0,666 & 0 & 0 & 0 \\
 M_1 & 0,666 & 1,333 & 0,666 & 0,666 & 0 & 0 & 0 \\
 80 \text{ kN} & 0,444 & 0,666 & 1,212 & 0,293 & 0,768 & 0,960 & 0 \\
 25 \text{ kN.m} = 78125 \times & 0,666 & 0,666 & 0,293 & 2,933 & 0,960 & 0,800 & \times \theta_2 \\
 30 \text{ kN.m} & 0 & 0 & 0,768 & 0,960 & 0,768 & 0,960 & v_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0,960 & 0,800 & 0,960 & 1,600 & \theta_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Portanto, para o cálculo das deformações, dispor-se-á do sistema de equações (44).

$$\begin{bmatrix} 25 \text{ kN.m} \\ 30 \text{ kN.m} \\ 0 \end{bmatrix} = 78125 \times \begin{bmatrix} 2,933 & 0,960 & 0,800 \\ 0,960 & 0,768 & 0,960 \\ 0,800 & 0,960 & 1,600 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Resolvendo tal sistema, encontra-se os seguintes valores para as deformações:

- $\theta_2 = 4,8012 \cdot 10^{-4}$ rad (sentido horário);
- $v_3 = 3,200 \cdot 10^{-3}$ m = 3,200 mm (para baixo);
- $\theta_3 = 1,68012 \cdot 10^{-3}$ rad (sentido horário).

Conhecendo as deformações, torna-se possível ainda calcular os valores dos esforços no engaste. Substituindo-os na equação (43), temos que:

- $f_1 = 78125 \cdot 0,666 \cdot \theta_2 = 78125 \cdot 0,666 \cdot 4,8012 \cdot 10^4$
 $\Rightarrow f_1 = 25 \text{ kN};$
- $M_1 = 78125 \cdot 0,666 \cdot \theta_2 = 78125 \cdot 0,666 \cdot 4,8012 \cdot 10^4$
 $\Rightarrow M_1 = 25 \text{ kN.m.}$

127

Comparação com o software estrutural Ftool

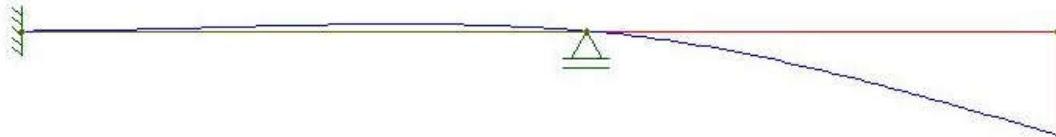
Novamente buscou-se contrastar os resultados pelo MEF com os fornecidos pelo Ftool. Os resultados fornecidos pelo software foram:

- $\theta_2 = 4,800 \cdot 10^{-4}$ rad;
- $v_3 = 3,198 \cdot 10^{-3}$ m = 3,198 mm;
- $\theta_3 = 1,680 \cdot 10^{-3}$ rad.

Comparando-os, nota-se que os mesmos são muito próximos e pode se atribuir as divergências às aproximações realizadas na resolução do método. As Figuras 18 e 19 apresentam os resultados encontrados.

Figura 18: Resultado das deformações no nó 1 da viga do exemplo 2.

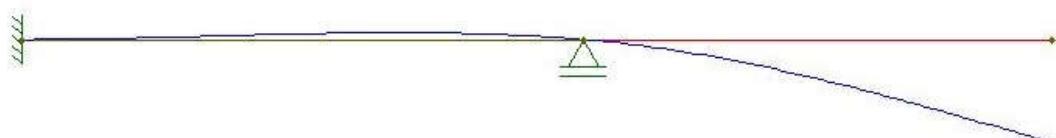
Displ./rotat. at local pos.: x = 2.50 m L = 2.50 m - Dx: 0.000e+000 mm Dy: -3.198e+000 mm Rz: -1.680e-003 rad



Fonte: Ftool.

Figura 19: Resultado das deformações no nó 2 da viga do exemplo 2.

Displ./rotat. at local pos.: x = 0.00 m L = 2.50 m - Dx: 0.000e+000 mm Dy: 0.000e+000 mm Rz: -4.800e-004 rad



Fonte: Ftool.

128

Outra vez, nota-se que a concordância entre os valores foi altíssima e isso confirma a eficiência do Método dos Elementos Finitos.

Conclusão

Buscando analisar estruturas mais complexas, um procedimento aproximado que pode ser aplicado de forma geral, independente da forma da estrutura e da condição de carregamento, dentro de uma precisão aceitável na engenharia é o Método dos Elementos Finitos.

Em tal método, a ideia base para o equacionamento foi a discretização, onde, para se estudar a estrutura, analisa-se elementos da mesma para, a partir de pequenas partes, compreender o todo.

Com esse pensamento, equacionou-se o Método dos Elementos Finitos, que consiste de operações matriciais, que possuem como fundamento a relação entre forças nodais e deslocamento nodais para cada elemento individual.

Para exemplificar o funcionamento do método, calculou-se as deformações de duas vigas, uma em balanço e outra contínua. Na resolução do sistema de equações foi utilizado o

Método de Eliminação de Gauss, pois julgou-se que o mesmo se trata de um método rápido, prática e com ótima precisão.

É valido ressaltar que contrastando os valores encontrados com os gerados pelo software estrutural Ftool, verificou-se que os mesmos coincidem com elevada concordância.

Portanto, confirmou-se a eficiência do Método dos Elementos Finitos e ratificou-se a praticidade do mesmo, visto que, a discretização, acarreta em muitas equações algébricas simultâneas, que são geradas e resolvidas facilmente com o auxílio de softwares numéricos. Neste contexto, a programação do método com o auxílio de métodos numéricos, torna-se uma importante ferramenta de auxílio para projetistas no âmbito da engenharia.

Referências

ALVES, A. F. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. São Paulo: Érica, 2003.

BEER, F. P.; JOHNSON, R. E.; EISENBERG, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros**. 9^a ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2012.

129

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3^a ed. São Paulo: Harbra, 1986

CIMM – Centro de Informação Metal Mecânica. Disponível em: <<http://www.cimm.com.br/portal/>>. Acesso em 22 fev. 2016.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. 3^a ed. São Paulo: EdUSP, 2005.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 2^a ed. Singapura: McGraw-Hill, 1993.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2^a ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

VANDERLEI, R. DIAS. **Resistência dos Materiais: Notas de Aula**. Universidade Estadual de Maringá - UEM. Maringá: 2009. Disponível em: <www.gdace.uem.br/romel/MDidatico/.../Capitulo4-De exaodeVigas.pdf> Acesso em 21 de fev. 2017.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method - Basic Formulation and Linear Problems**. 4^a ed. Berkshire: McGraw-Hill, 1989.