

## UMA ABORDAGEM FUZZY PARA O PROCESSO DE FERMENTAÇÃO DE PÃES ARTESANAIS

## A FUZZY APPROACH FOR THE FERMENTATION'S PROCESS OF HANDMADE BREADS

## UN ENFOQUE DIFUSO PARA EL PROCESO DE FERMENTACIÓN DE PANES ARTESANALES

Wemerson Mauricio dos Santos<sup>1</sup>  
Marco Aurélio Granero<sup>2</sup>  
Mônica Helena Ribeiro Luiz<sup>3</sup>

**Resumo:** Neste trabalho é apresentado um modelo matemático utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy para o processo de fermentação de pães artesanais através do Princípio da Extensão de Zadeh. O desenvolvimento do modelo fuzzy foi feito a partir dos dados experimentais presentes em Boeno (2018). Também com esse texto se justifica a escolha de fuzzificar o modelo logístico contínuo de Verhulst, sendo a população inicial o parâmetro escolhido a ser descrito através da Teoria dos Conjuntos Fuzzy por meio de um número fuzzy triangular.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Modelo Matemático. Princípio da Extensão de Zadeh. Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

**Abstract:** In this work, a mathematical model was developed using Fuzzy Sets Theory for the fermentation's process of handmade breads by Zadeh Extension Principle. The development of the fuzzy model was based on the experimental data present in Boeno (2018) as well the justification of the parameter chosen to be described with the Fuzzy Sets Theory was the initial population, which is represented by a triangular fuzzy number.

**Keywords:** Fuzzy Sets Theory. Mathematical modeling. Math model. Zadeh Extension Principle.

**Resumen:** En este trabajo, ha sido desarrollado un modelo matemático utilizando la lógica difusa para el proceso de fermentación de panes artesanales. El desarrollo del modelo difuso partió de los datos experimentales presentes en Boeno (2018) que también contiene una justificación para elegir lo parámetro descrito por la lógica difusa, que fue la condición inicial, representada por un número difuso del tipo triangular.

**Palabras-clave:** Modelación Matemática. Modelo matemático. Principio de Extensión. Teoría de los sets difusos.

Submetido 09/01/2021

Aceito 29/07/2021

Publicado 18/10/2021

<sup>1</sup> Licenciado em Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. E-mail: wemersonmauricio@gmail.com. Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-5318-7444>

<sup>2</sup> Doutor em Engenharia Elétrica. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. E-mail: granero@ifsp.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1993-1898>

<sup>3</sup> Doutora em Matemática Aplicada. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. E-mail: monicahrl@ifsp.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9189-7615>

## Introdução

Ao longo dos anos, muitos autores têm apresentado definições acerca do que é o processo de Modelagem Matemática, dentre as quais é possível citá-la como: “[...] um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la” (Bassanezi, 2006, p. 17).

Ainda segundo Bassanezi (2006), a Modelagem Matemática, com seu poder de síntese e abrangência, é por excelência o método científico usado nas ciências factuais e seu uso como instrumento de pesquisa está na sua capacidade de:

- Estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- Sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- Preencher lacunas onde existe falta de dados experimentais;
- Servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
- Servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento;

O Autor também destaca que a eficiência da Modelagem Matemática está na conscientização de que o matemático está trabalhando com aproximações da realidade, elaborando representações de um sistema ou parte dele.

A Modelagem Matemática pode ser utilizada de diferentes formas, técnicas e teorias para a solução de um determinado problema como, por exemplo, através da Teoria dos Conjuntos Fuzzy ou simplesmente Modelagem Fuzzy.

Segundo Barros e Bassanezi (2010), a Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi introduzida no meio científico em 1965 pelo azerbaijano Lofti Asker Zadeh com a intenção de dar um tratamento matemático a termos linguísticos subjetivos como “aproximadamente” e “em torno de”. E, desde então, vem ganhando destaque por ser capaz de formalizar matematicamente fenômenos e termos que carregam subjetividades e/ou imprecisões em suas classificações através do conceito de grau de pertinência a um conjunto.

Palavras como “muito”, “pouco”, “aproximadamente”, “próximo”, “perto”, “longe”, “alto”, “baixo” e intensificadores no geral são exemplos de termos que podem ser

matematizados usando essa teoria, uma vez que em diversas situações do mundo real o ser humano deve lidar com frases, orações, acontecimentos, momentos, fenômenos etc. que são subjetivos e/ou imprecisos.

A utilização da lógica convencional até possibilita a tradução de termos da linguagem natural (língua portuguesa, inglesa etc.) para a linguagem matemática, porém ela não consegue contemplar as subjetividades, imprecisões e incertezas que estão presentes em seus significados e usos devido à lei (ou princípio) do terceiro excluído<sup>4</sup>.

No caso da Lógica Fuzzy, os elementos podem pertencer parcialmente a um conjunto e, com isso, aumenta-se significativamente a quantidade de símbolos/expressões matemáticas que são capazes de estabelecer correspondências com esses termos subjetivos e/ou imprecisos.

Para que a ideia fique mais clara, considere, como exemplo, uma pessoa que está a caminho de um parque. Neste caso, é razoável pensar que ela está mais próxima do parque conforme a distância entre ambos fica menor, de tal modo que estar a 10 km do destino não é exatamente o mesmo que estar a 5 km, evidenciando a subjetividade da palavra “próximo”.

Assim como na linguagem natural, modelos matemáticos podem conter parâmetros que carregam incertezas que podem influenciar na representatividade dos resultados obtidos.

Modelos Fuzzy ou Sistemas Variacionais Fuzzy são modelos matemáticos que utilizam a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na sua construção e, “[...] podem comportar vários tipos de incertezas (subjetividades ou *fuzziness*) que podem estar acopladas nos parâmetros, nas condições iniciais ou nas próprias variáveis de estado”, (Ceconello; Silva; Bassanezi, 2010, p. 8).

O objetivo deste trabalho é aplicar ao processo de fermentação de pães artesanais uma abordagem utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e com isso construir um modelo fuzzy para este processo.

## Motivação

Em Boeno (2018), é possível observar que o processo de confecção de pães artesanais envolve características que apresentam incertezas e imprecisões, dentre as quais é possível citar: a medição dos ingredientes, o papel da temperatura no processo de fermentação, a receita com

---

<sup>4</sup> Dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira, Mortari (2001).

instruções como “sove bem” ou acrescente uma “pitada” de sal, características estas que podem ser modeladas matematicamente utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

Para isso, é necessário escolher a abordagem a ser utilizada. Barros e Bassanezi (2010) destacam quatro formas para se trabalhar com sistemas dinâmicos fuzzy: Equações Diferenciais Fuzzy, Inclusões Diferenciais Fuzzy, Base de Regras Fuzzy e o Princípio da Extensão de Zadeh. Cada uma dessas formas se distingue pelo tratamento dado à taxa de variação e/ou como ela se relaciona com as variáveis de estado (variáveis que descrevem a evolução do sistema).

Uma vez que os modelos determinísticos para a fermentação de pães artesanais foram desenvolvidos em Boeno (2018), a abordagem escolhida para elaborar um modelo fuzzy para a fermentação de pães artesanais foi o Princípio da Extensão de Zadeh e, o parâmetro escolhido para ser descrito através da Teoria dos Conjuntos Fuzzy (fuzzificado) foi a população inicial do modelo logístico de Verhulst.

Dessa forma, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy será aplicada nesse modelo com os dados experimentais de Boeno (2018).

### **Função de Pertinência, Suporte e $\alpha$ -níveis de um subconjunto fuzzy**

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy é uma área bastante ampla de modo que enunciar todos os seus resultados e propriedades fogem ao escopo deste trabalho. Sendo assim serão enunciados apenas os resultados essenciais ao desenvolvimento do modelo fuzzy.

O primeiro destes conceitos é o de função de pertinência que representa o quanto determinado elemento pertence ao conjunto fuzzy. Este valor é escolhido dentro das características e/ou do contexto de análise do fenômeno em estudo, por exemplo,  $\varphi_F(x) = 1$  e  $\varphi_F(x) = 0$  representam respectivamente a pertinência e a não pertinência completa de  $x$  ao conjunto  $F$ .

**Definição 1:** *Seja  $U$  um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função*

$$\varphi_F: U \rightarrow [0, 1],$$

*pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ .*

Os conceitos de suporte e  $\alpha$ -nível são importantes para a realização dos cálculos dentro da Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

**Definição 2:** O suporte do subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é definido por:

$$\text{supp}(F) = \{x \in U; \varphi_F(x) > 0\},$$

ou seja, o suporte de um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  são todos os elementos de  $U$  que têm grau de pertinência diferente de zero em  $F$ .

**Definição 3:** Seja  $F$  um subconjunto fuzzy de  $U$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . O  $\alpha$ -nível de  $F$  é o subconjunto clássico de  $U$  definido por

$$[F]^\alpha = \{x \in U: \varphi_F(x) \geq \alpha\}, \forall \alpha \in ]0, 1].$$

O nível zero do subconjunto fuzzy  $F$  é definido como o fecho do suporte de  $F$ , ou seja, é menor subconjunto clássico fechado de  $U$  que contém o suporte de  $F$ ,

$$[F]^0 = \overline{\text{supp}(F)}.$$

### O Princípio da Extensão de Zadeh

O Princípio da Extensão de Zadeh é uma das ideias que estendem conceitos matemáticos não-fuzzy em fuzzy.

Segundo Barros e Bassanezi (2010), dada uma função  $f: X \rightarrow Z$ , esse princípio tem como objetivo indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy  $A$  de  $X$  por  $f$ . É de se esperar que esse conjunto seja um subconjunto fuzzy de  $Z$ .

**Definição:** Sejam  $f$  uma função tal que  $f: X \rightarrow Z$  e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . A Extensão de Zadeh de  $f$  é a função  $\hat{f}$  (lê-se  $f$  chapéu) que, aplicada a  $A$ , fornece o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

onde  $f^{-1}(z) = \{x: f(x) = z\}$  denomina-se a pré-imagem de  $z$ .

Pela definição, o Princípio da Extensão de Zadeh pode ser caracterizado pelo seguinte:

- O grau de pertinência de um valor do contradomínio  $Z$  a  $\hat{f}(A)$  é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem a  $A$ .
- Quando um valor do contradomínio  $Z$  é mapeado por vários do domínio  $X$ , o seu grau de pertinência a  $\hat{f}(A)$  é obtido pelo supremo dos graus de pertinência dos valores da entrada a  $A$ .
- Quando um valor do contradomínio  $Z$  não é mapeado por nenhum do domínio  $X$ , o seu grau de pertinência a  $\hat{f}(A)$  é zero.

O resultado teórico mais importante neste trabalho diz respeito ao teorema 1 que é uma consequência direta da aplicação do Princípio da Extensão de Zadeh a um conjunto clássico.

**Teorema 1:** *Sejam  $f: X \rightarrow Z$  uma função contínua e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . Então, para todo  $\alpha \in [0,1]$  vale*

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha).$$

Este teorema indica que os  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio da Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos  $\alpha$ -níveis pela função crisp (Barros e Bassanezi, 2010, p.40).

Para tanto, seja  $f: X \rightarrow Z$  e  $A$  um subconjunto clássico de  $X$ . Tomando a função de pertinência  $A$  como sua função característica:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Aplicando a Extensão de Zadeh de  $f$  à  $A$  obtém-se o subconjunto  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função característica é:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x:f(x)=z\}} \mathcal{X}_A(x) \begin{cases} 1 & \text{se } z \in f(A) \\ 0 & \text{se } z \notin f(A) \end{cases} = \mathcal{X}_{f(A)}(z)$$

para todo  $Z$ .

Este resultado estabelece que a função de pertinência do conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  coincide com função característica do conjunto crisp  $f(A)$ , ou seja, o conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  coincide com o conjunto clássico  $f(A)$ :

$$\hat{f}(A) = f(A) = \{f(a): a \in A\}.$$

Utilizando o conceito de  $\alpha$ -nível, pode-se observar que, se  $A$  for um conjunto clássico então  $[A]^\alpha = A$  para todo  $\alpha \in [0,1]$  e, conseqüentemente:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = [f(A)]^\alpha = f(A) = f([A]^\alpha).$$

Para ilustrar os resultados do teorema 1 e da definição do Princípio da Extensão de Zadeh, considere o seguinte exemplo:

**Exemplo:** Sejam  $U = \left[0, \frac{3}{2}\right]$ ,  $V = \left[0, \frac{9}{4}\right]$  e a função  $f: U \rightarrow V$ , tal que  $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$ .

Determinar a extensão de Zadeh,  $\hat{f}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ , aplicada ao conjunto fuzzy  $A$  de  $U$  dado por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x - 0,2}{0,3} & \text{se } 0,2 < x \leq 0,5 \\ -x + 0,8 \\ \frac{0,3}{0} & \text{se } 0,5 < x \leq 0,8 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo  $\mathcal{F}(U)$  e  $\mathcal{F}(V)$  as famílias de todos os subconjuntos fuzzy de  $U$  e  $V$ , respectivamente.

A Figura 1 apresenta, no primeiro quadrante do plano cartesiano o gráfico da função  $f: U \rightarrow V$  dada por  $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$  (destacada em verde). No segundo quadrante tem-se a representação do gráfico da extensão de Zadeh (curva em vermelho). E, no quarto quadrante é representada a função de pertinência do conjunto fuzzy  $A$  do enunciado (curva em azul).

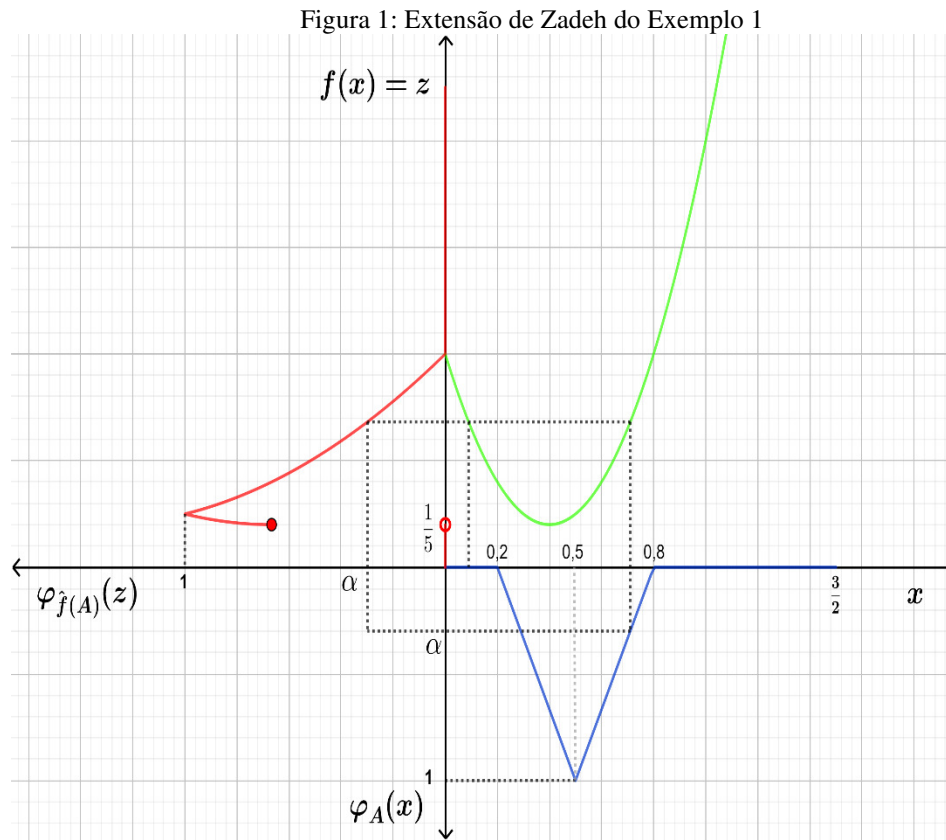
Observe que, como  $U = \left[0, \frac{3}{2}\right] \subseteq \mathbb{R}$ , o conjunto fuzzy  $A$  é um número fuzzy triangular dado por:

$$A = (0,2; 0,5; 0,8),$$

e, sem perda de generalidade, pode ser representado por seus  $\alpha$ -níveis como:

$$[A]^\alpha = [0,3\alpha + 0,2; -0,3\alpha + 0,8] = \left[\frac{3}{10}\alpha + \frac{2}{10}; -\frac{3}{10}\alpha + \frac{8}{10}\right].$$





A aplicação direta do *Teorema 1* a  $f$  resulta em:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha) = \frac{1}{20} [9\alpha^2 - 12\alpha + 8; 9\alpha^2 - 24\alpha + 20]$$

A partir de  $[\hat{f}(A)]^\alpha$ , função de pertinência do conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ , pode-se construir  $V$ . Para isso, considere primeiramente que  $z = \frac{1}{20}(9\alpha^2 - 12\alpha + 8)$ , isto é,  $z \in V$  é o extremo esquerdo do intervalo dos  $\alpha$ -níveis de  $\hat{f}(A)$ . Lembre-se que, nesse caso,  $\alpha$  representa o valor da imagem da função de pertinência do conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ , isto é, os graus de pertinência de  $z \in V$  a  $\hat{f}(A)$ :

$$20z = 9\alpha^2 - 12\alpha + 8 \Leftrightarrow 9\alpha^2 - 12\alpha + 8 - 20z = 0.$$

que é uma equação de segundo grau na variável  $\alpha$  cujo conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{ \alpha \in [0,1]; \alpha = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z}) \text{ ou } \alpha = \frac{2}{3}(1 - \sqrt{-1 + 5z}) \right\}$$

Procedendo de modo análogo e considerando agora que  $z = \frac{1}{20}(9\alpha^2 - 24\alpha + 20)$ , isto é,  $z \in V$  é o extremo direito do intervalo dos  $\alpha$ -níveis de  $\hat{f}(A)$ , os valores de  $\alpha$  são tais que:



$$S = \left\{ \alpha \in [0,1]; \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z}) \text{ ou } \frac{2}{3}(2 + \sqrt{-1 + 5z}) \right\}.$$

Observe que  $\frac{2}{3}(2 + \sqrt{-1 + 5z})$  é maior que 1 para todo  $z$  em  $V$ , logo, das quatro funções em  $z$  para representar  $\alpha$ , apenas três delas pertencem ao intervalo  $[0, 1]$ .

Para a função 1:  $\alpha = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z})$ , obtém-se:

$$0 \leq \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z}) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{1}{2}.$$

Adicionando a condição de existência de  $\alpha$  tem-se:

$$0 \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq |-1 + 5z| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq -1 + 5z \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq z \leq \frac{1}{4}.$$

Portanto, tem-se:

$$\alpha = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z}), \quad \text{quando } z \in \left[ \frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right].$$

Com a função 2:  $\alpha = \frac{2}{3}(1 - \sqrt{-1 + 5z})$ , obtém-se:

$$0 \leq \frac{2}{3}(1 - \sqrt{-1 + 5z}) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq 1.$$

Adicionando a condição de existência de  $\alpha$  tem-se:

$$0 \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |-1 + 5z| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq -1 + 5z \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq z \leq \frac{2}{5}.$$

Portanto, tem-se:

$$\alpha = \frac{2}{3}(1 - \sqrt{-1 + 5z}), \quad \text{quando } z \in \left[ \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right].$$

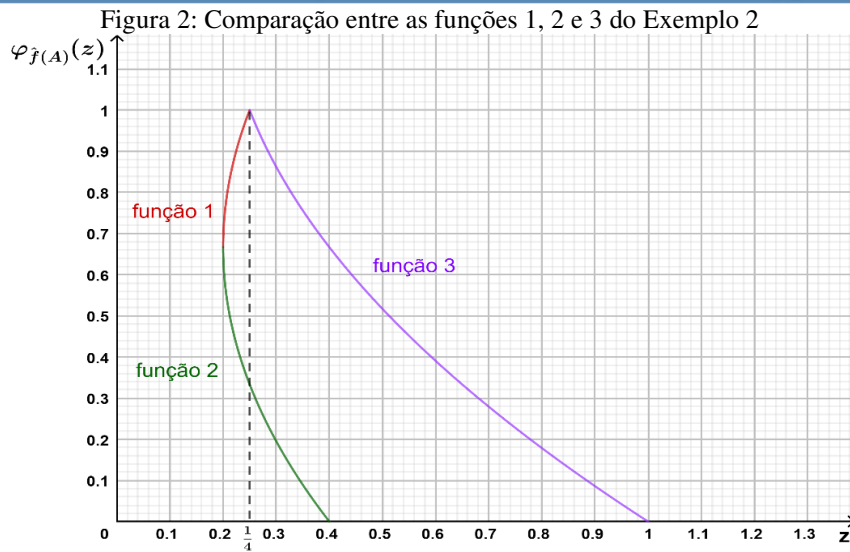
Para a função 3:  $\alpha = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z})$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z}) \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq 2 - \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \leq |-1 + 5z| \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq -1 + 5z \leq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq 5z \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq z \leq 1 \end{aligned}$$

Portanto, tem-se:

$$\alpha = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z}), \quad \text{quando } z \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right].$$

Observe que, em alguns intervalos, há mais de uma função que o representa. Para resolver esse problema, considere a Figura 2 que contém o gráfico de cada uma dessas funções, em seus respectivos intervalos.



Fonte: Autoria própria.

Note que, no intervalo  $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$ , função 1  $\geq$  função 2. Sendo assim, a função 1 será escolhida para representar esse intervalo, pois a extensão de Zadeh utiliza o supremo. No intervalo  $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right]$ , função 3  $\geq$  função 2. Portanto, a função 3 será escolhida.

Sendo assim, tem-se que a extensão de Zadeh solicitada no enunciado do exemplo é:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z}) & \text{se } \frac{1}{5} < z \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z}) & \text{se } \frac{1}{4} < z \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $z \in V$ .

### Dados Experimentais e o Modelo de Verhulst

Os dados experimentais para este artigo foram obtidos por Boeno (2018) em seu trabalho sobre a modelagem do processo de fermentação de pães artesanais. Destes dados, será fuzzificada a condição inicial do modelo por meio do Princípio da Extensão de Zadeh.

Inicialmente será apresentado o modelo logístico determinístico de Verhulst e suas principais características. A seguir, são apresentados os dados experimentais de Boeno (2018) bem como a justificativa pela escolha do modelo logístico de Verhulst para modelar o processo de fermentação de pães artesanais. Por fim, a solução fuzzy do modelo será obtida.

O modelo logístico em questão será tratado exclusivamente para populações crescentes, uma vez que o fenômeno em estudo apresenta crescimento de população.

Caso o leitor tenha interesse em uma análise sobre a face decrescente deste modelo, sugere-se a referência Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática (Bassanezi, 2006).

### O Modelo Determinístico de Verhulst

Segundo Bassanezi (2006), o primeiro modelo a pressupor uma variação na taxa de crescimento relativo foi proposto em 1837 pelo matemático belga Pierre François Verhulst.

Esse modelo tem como característica a presença de um inibidor de crescimento populacional que considera que a população não ultrapassará um valor limite, chamado capacidade suporte.

A formulação diferencial desse modelo considera que a variação da população é diretamente proporcional à taxa de crescimento  $\beta(P)$  que, por sua vez, é proporcional à população  $P$ , em cada instante de tempo  $t$ .

Em linguagem matemática, sua formulação é dada pela equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P, \quad (1)$$

com  $\beta(P) = \frac{r(k-P)}{k} = r\left(1 - \frac{P}{k}\right)$ , em que  $r > 0$  e  $k > 0$  são, respectivamente, o índice intrínseco de crescimento, que indica a capacidade do indivíduo se reproduzir sem a interferência do meio, e a capacidade suporte, também chamada de valor limite da população.

Ao explicitar  $\beta(P)$  na equação (1), obtém-se:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) = rP - \frac{rP^2}{k}. \quad (2)$$

Essa segunda formulação pode ser interpretada como a variação da população, em função do tempo, sendo proporcional à própria população em cada instante, mas também limitada, em seu crescimento, pela interação da população.

Supondo que a população no instante  $t = 0$  seja dada por  $P(0) = P_0$ , pode-se associar a este modelo o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) \\ P(0) = P_0, k, r > 0 \end{cases} \quad (3)$$

A solução deste PVI pode ser obtida através da separação de variáveis associada à técnica de integração por frações parciais, e é dada por:

$$P(t) = \frac{k}{\left(\frac{k-P_0}{P_0}\right)e^{-rt} + 1} \quad (4)$$

Pode-se ainda reescrever (4), de forma equivalente, da seguinte maneira:

$$P(t) = \frac{k}{\left(\frac{k-P_0}{P_0}\right)e^{-rt} + \frac{P_0}{P_0}} = \frac{\left(\frac{k}{(k-P_0)e^{-rt}+P_0}\right)}{\frac{P_0}{P_0}} = \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (5)$$

que evidencia a população inicial,  $P_0$ , quando  $t = 0$ , e a capacidade suporte,  $k$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

A Tabela 1 apresenta algumas características do modelo logístico crescente de Verhulst.

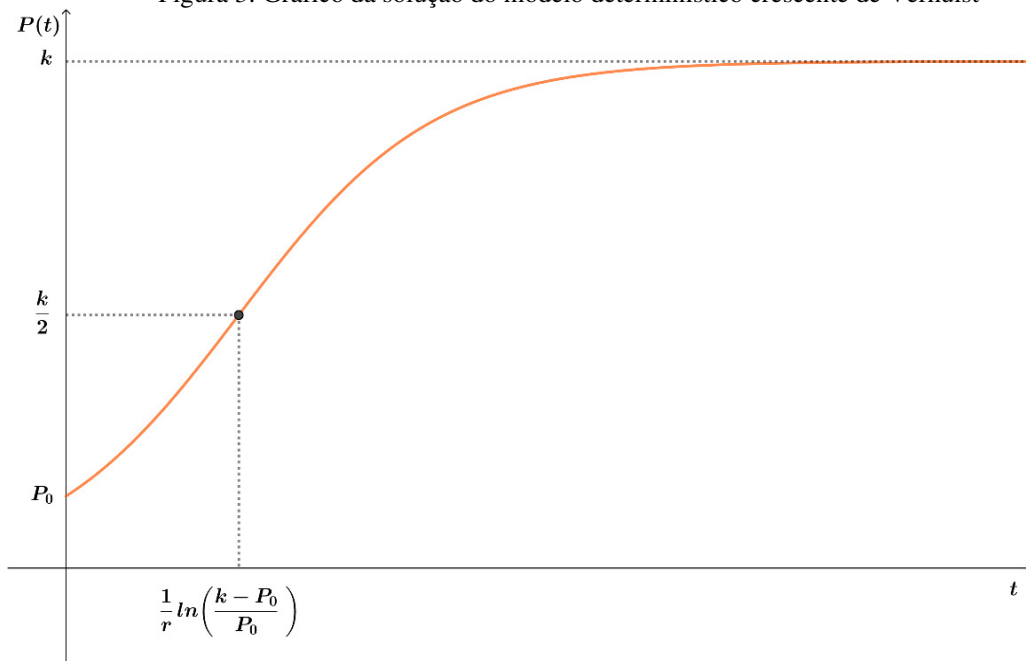
Tabela 1: Informações sobre o Modelo determinístico de Verhulst

Nome	Modelo logístico de Verhulst
Forma diferencial	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right)$
Função solução	$P(t) = \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0}$
Restrições nos parâmetros	$k > P_0, r > 0$
Assíntota horizontal	$P = k$
Assíntota vertical	Não possui
Pontos críticos	Não possui
Ponto de inflexão	$\left(\frac{1}{r} \ln\left(\frac{k - P_0}{P_0}\right), \frac{k}{2}\right)$
Pontos de estabilidade	$P = 0$ e $P = k$

Fonte: Autoria própria.

A Figura 3 apresenta um gráfico genérico da curva logística, segundo as hipóteses discutidas nessa seção.

Figura 3: Gráfico da solução do modelo determinístico crescente de Verhulst



Fonte: Autoria própria

### Justificativa e escolha dos parâmetros

Os dados experimentais utilizados neste trabalho foram obtidos da monografia “Modelagem Matemática e a arte da fabricação de pães artesanais” de Boeno (2018), e corresponde à área de seção transversal de fotografias binarizadas tiradas durante o processo de fermentação de pães artesanais, em intervalos de tempo regulares utilizados para avaliar, entre os modelos logístico e exponencial assintótico, qual representava melhor o processo de fermentação de pães artesanais.

Boeno concluiu que: “[...] o modelo que pode ser utilizado para descrever a fermentação de pães artesanais é o **modelo logístico**” (Boeno, 2018, p. 51), baseada no fato de que, em todos os casos, o modelo logístico foi o que melhor representou os dados experimentais.

Os parâmetros utilizados neste trabalho são referentes ao Pão 1 (P1), cuja equação de crescimento obtida por Boeno (2018) é dada por (6), cujos parâmetros estão explicitados na Tabela 2.

$$P(t) = \frac{3.477.738}{11,8355e^{-0,0018t} + 1} \quad (6)$$

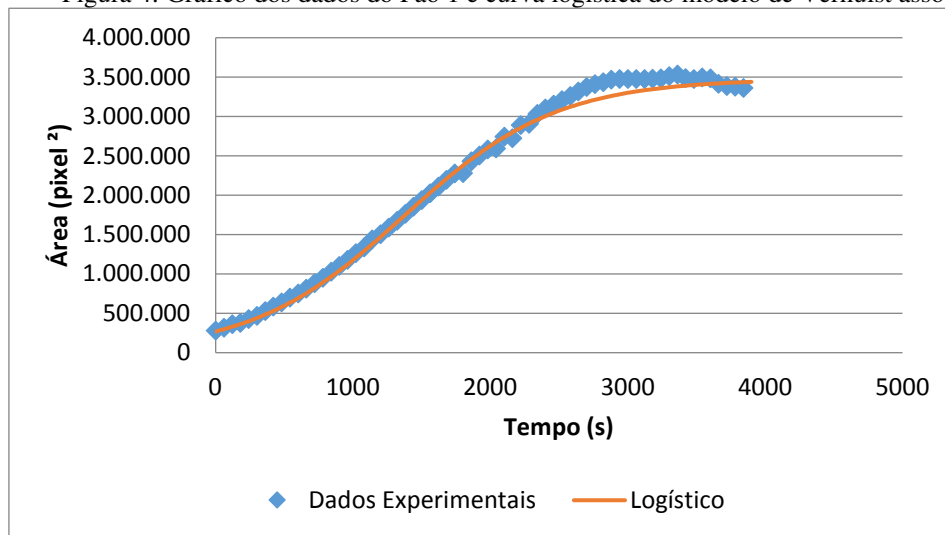
Tabela 2: Parâmetros do modelo logístico determinístico

Parâmetro	Valor
$k$	3.477.738
$r$	0,0018
$P_0$	270.946,8272

Fonte: Adaptado de Boeno (2018, p. 42).

Na Figura 4 é apresentado o gráfico de dispersão dos dados experimentais do Pão 1 e a curva logística do modelo de Verhulst a ele associado.

Figura 4: Gráfico dos dados do Pão 1 e curva logística do modelo de Verhulst associado



Fonte: Adaptado de Boeno (2018, p. 43)

O parâmetro escolhido para ser fuzzificado foi a população inicial  $P_0$ , e a justificativa para tal escolha foi baseada nas orientações contidas na receita, ressaltando que:

- No modo de preparo, a orientação é que se modele a massa na forma, no entanto nem sempre será possível modelar exatamente no mesmo formato;
- Segundo Boeno (2018), o fermento biológico seco utilizado no preparo do pão artesanal é influenciado pela temperatura do local, de modo que quanto maior for a temperatura do ambiente, mais rápido será o processo de fermentação, logo o tempo de espera de 20 minutos entre a primeira e segunda sova pode não resultar sempre no mesmo tamanho de pão;
- No modo de preparo, a orientação é aguardar até que a massa dobre de volume, medição que, em geral, é feita a olho nu, isto é, a pessoa que observa se a massa dobrou de volume não o faz com um instrumento preciso de medição.

Para adaptar o valor da condição inicial para um número fuzzy, serão consideradas as condições iniciais obtidas por Boeno (2018) para cada um dos quatro pães considerados em seu trabalho, cujos valores, em pixels ao quadrado, são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3: Populações iniciais

P1	P2	P3	P4
284.780	150.721	257.784	317.381

Fonte: Adaptado de Boeno (2018, p. 59)

Note que os valores são diferentes, o que reforça as observações apresentadas anteriormente.

O valor de P2 será desconsiderado por ser o mais discrepante em relação aos outros, ademais, como o modelo a ser fuzzificado considera os parâmetros obtidos através dos dados de P1, é justo que a condição inicial deste modelo tenha grau de pertinência máximo (um), e os outros valores, P3 e P4, terão grau de pertinência mínimo (zero). Portanto, a condição inicial será o número triangular fuzzy:

$$\hat{P}_0 = (257.784/284.780/317.381). \quad (7)$$

cujos  $\alpha$ -níveis são:

$$[\hat{P}_0]^\alpha = [26.996\alpha + 257.784, -32.601\alpha + 317.381] \quad (8)$$

para todo  $\alpha \in [0,1]$ .

Deste modo, os parâmetros para o modelo logístico fuzzy desenvolvido neste trabalho estão resumidos na Tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros do modelo logístico fuzzy.

Parâmetro	Tipo	Valor
$k$	Crisp	3.477.738
$r$		0,0018
$\hat{P}_0$	Fuzzy	(257.784/284.780/317.381)

Fonte: Autoria própria.

### Modelo de Verhulst com condição inicial fuzzy

Note que equação (5), solução do problema de valor inicial (3), depende somente de  $t$  e da condição inicial  $P_0$ , de modo que pode ser reescrita com a seguinte notação:



$$P_t(P_0) = P(t, P): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, P_0) \rightarrow P_t(P_0) = \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (9)$$

Considerando a condição inicial fuzzificada pelo número triangular fuzzy  $\hat{P}_0$  dado pela equação (8), enuncia-se o Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) para o modelo logístico de Verhulst com condição inicial fuzzy como:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right), \\ \hat{P}(0) = \hat{P}_0, \end{cases} \quad (10)$$

com  $P: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , e  $P_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

A solução, neste caso, é obtida aplicando o Princípio da Extensão de Zadeh à solução determinística (10), ou seja:

$$\hat{P}_t(P_0) = \hat{P}(t, P): \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

$$(t, \hat{P}_0) \rightarrow \hat{P}_t(\hat{P}_0) = \frac{\hat{P}_0 k}{(k - \hat{P}_0)e^{-rt} + \hat{P}_0} \quad (11)$$

Aplicando diretamente o resultado do *Teorema 1*, onde o  $\alpha$ -nível da solução fuzzy é a imagem do  $\alpha$ -nível,  $[\hat{P}_t(\hat{P}_0)]^\alpha = P_t([\hat{P}_0]^\alpha)$ , a solução (11) pode ser reescrita como:

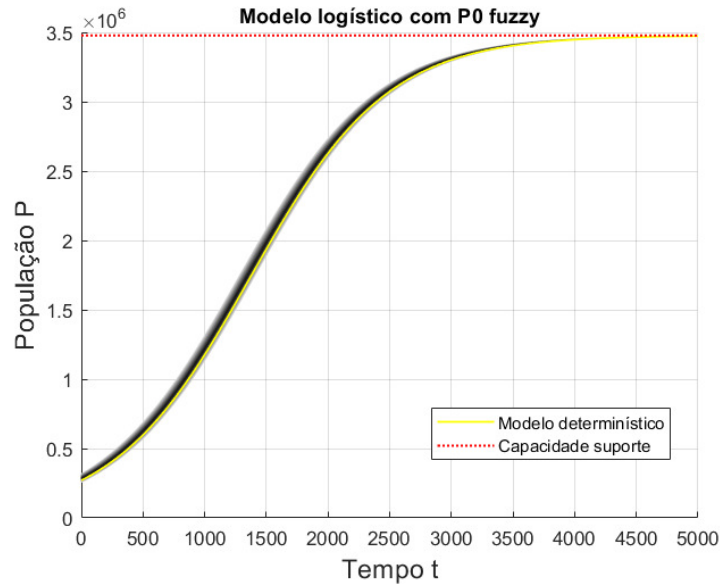
$$[\hat{P}_t(\hat{P}_0)]^\alpha = \frac{k[26996\alpha + 257784; -32601\alpha + 317381]}{(k - [26996\alpha + 257784; -32601\alpha + 317381])e^{-rt} + [26996\alpha + 257784; -32601\alpha + 317381]} \quad (12)$$

A equação (12) define uma família de soluções determinísticas dadas por (9), sendo que o grau de pertinência de cada solução é dado por  $\alpha$ .

## Discussão e resultados

A Figura 5 representa a solução fuzzy do modelo logístico de Verhulst para fermentação de pães artesanais, indicada na equação (12).

Figura 5: Representação gráfica da solução do modelo logístico fuzzy

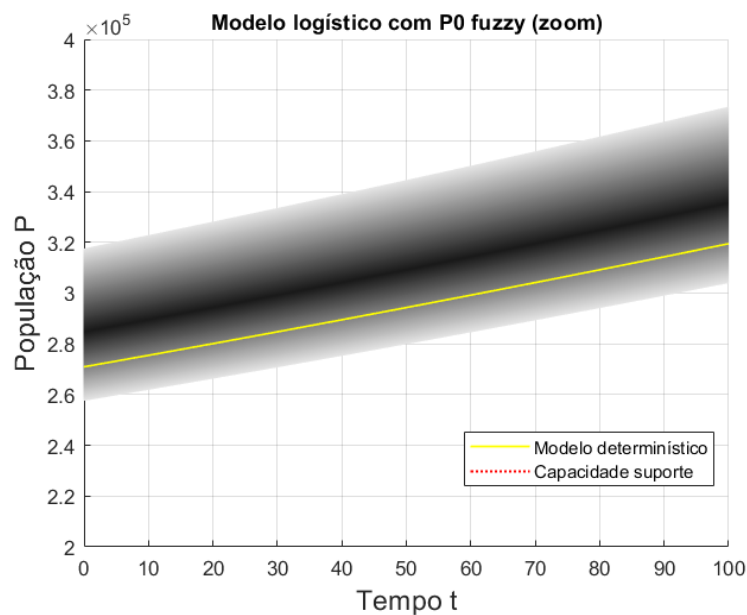


Fonte: Autoria própria.

Na Figura 5 há diversas curvas determinísticas com uma graduação de cor na escala de cinza que representam os diferentes graus de pertinência das curvas ao conjunto fuzzy  $\hat{P}_t(\hat{P}_0)$ , determinadas a partir do grau de pertinência dos  $P_0$  ao número fuzzy triangular  $\hat{P}_0$  determinado em (7), utilizando a extensão de Zadeh.

A Figura 6 apresenta um zoom da Figura 5 para o intervalo  $t \in [0, 100]$ .

Figura 6: Zoom no gráfico da Figura 5 do modelo logístico fuzzy



As Figuras 5 e 6 também apresentam a solução do modelo logístico determinístico (6) para a fermentação de pães artesanais, curva em amarelo, sendo possível notar que o modelo logístico fuzzy abrange o modelo determinístico, evidenciando que a solução fuzzy não é só capaz de contemplar a solução determinística, mas também de obter uma família de soluções determinísticas.

### **Considerações finais**

Neste trabalho a Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi aplicada ao processo de fermentação de pães artesanais através da fuzzificação da condição inicial do modelo logístico de Verhulst relativo ao conjunto de dados experimentais via Princípio da Extensão de Zadeh.

Os resultados mostraram que a solução do problema de valor inicial fuzzy, além de conter a solução determinística do PVI, também apresentam outras soluções possíveis para diferentes condições iniciais contemplando possíveis incertezas no preparo das receitas.

## Referências

- BARROS, L. C. D.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. 2. ed. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2010.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.
- BOENO, M. C. F. **Modelagem Matemática e a arte da fabricação de pães**. Trabalho de conclusão de curso, IFSP, São Paulo, 2018.
- CECCONELLO, M. D. S. **Modelagem Alternativa para Dinâmica Populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy**. Dissertação (Mestrado), IMECC- UNICAMP, Campinas, 2006.
- CECCONELLO, M. D. S.; SILVA, J. D. D. M. D.; BASSANEZI, R. C. **Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para Sistemas Biológicos**. São Carlos: SBMAC, 2010.
- GOMES, L. T. **Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy**. Dissertação (Mestrado), IMECC- UNICAMP, Campinas, 2009.
- JAFELICE, R. S. D. M.; BARROS, L. C. D.; BASSANEZI, R. C. **Teoria dos Conjuntos fuzzy com Aplicações**. 2. ed. São Carlos - SP: SBMAC, 2012.
- MIZUKOSHI, M. T. **Estabilidade de Sistemas Fuzzy**. Tese (Doutorado), IMECC-UNICAMP, Campinas, 2004.
- MIZUKOSHI, M. T. **Introdução às equações diferenciais fuzzy: Inclusões diferenciais versus extensão de Zadeh**. [S.l.]: [s.n.], 2014. Disponível em: [http://www.de.ufpb.br/~cbsf2014/Minicurso\\_Profa.Marina\\_CBSF2014.pdf](http://www.de.ufpb.br/~cbsf2014/Minicurso_Profa.Marina_CBSF2014.pdf). Acesso em: 20 nov. 2020.
- MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: UNESP, 2001. p. 349-353.