Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

SOBRE AS VARIAÇÕES DE PARÂMETROS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: UMA APLICAÇÃO

ABOUT PARAMETER VARIATIONS OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS: AN APPLICATION

ACERCA DE LAS VARIACIONES DE PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: UNA APLICACIÓN

Luísi Emanuelly Silveira do Nascimento[1]
Carmen Vieira Mathias[2]

Resumo: A evolução tecnológica é um fato em todas as áreas do conhecimento, e isso se estende aos softwares utilizados para aprender e ensinar Matemática. Em meados de 2007, foi produzido um trabalho que propôs atividades sobre funções trigonométricas que deveriam ser resolvidas usando o software Winplot. Assim, este artigo objetiva realizar uma releitura de algumas atividades presentes na referida pesquisa, utilizando, para resolvê-las, o software GeoGebra. Ao realizar tal atualização, percebe-se que existe uma necessidade de pensar as atividades de forma a tornar o aluno autônomo, e espera-se apresentar aos professores uma possibilidade de realizar atividades utilizando um software acessível a todos.
Palavras-chave: Tecnologia. Funções Trigonométricas. Geogebra. Winplot.

Abstract: Technological evolution is a fact in all areas of knowledge, and this extends to the software used to learn and teach Mathematics. In mid-2007, a paper was produced, which proposed activities on trigonometric functions that should be solved using Winplot software. Thus, this article aims to carry out a re-reading of some activities present in that research, using the GeoGebra software to solve them. When carrying out this update, it is clear that there is a need to think about activities in order to make the student autonomous and it is expected to present teachers with the possibility of carrying out activities using software accessible to everyone
Keywords: Technology. Trigonometric Functions; Geogebra. Winplot.

Resumen: La evolución tecnológica es un hecho en todas las áreas del conocimiento, y esto se extiende al software utilizado para aprender y enseñar Matemáticas. A mediados de 2007 se elaboró un documento que proponía actividades sobre funciones trigonométricas que deberían resolverse con el software Winplot. Así, este artículo pretende realizar una relectura de algunas actividades presentes en esa investigación, utilizando el software GeoGebra para resolverlas. A la hora de realizar esta actualización, es evidente que existe la necesidad de pensar en actividades para que el alumno sea autónomo y se espera que presente a los docentes la posibilidad de realizar actividades utilizando software accesible para todos.
Palabras-clave: Tecnología. Funciones trigonométricas. Geogebra. Winplot.

Submetido 26/10/2021 **Aceito 01/12/2021** **Publicado 09/12/2021**

[1] Acadêmica do curso de Matemática Licenciatura. Universidade Federal de Santa Maria - UFSM. ORCID: https://orcid.org/ 0000-0003-4228-0656 . E-mail: luisiemanuelly@hotmail.com.
[2] Doutora em Matemática. Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria - UFSM. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5667-159X. E-mail: carmen@ufsm.br.

Introdução

As tecnologias digitais destinadas ao ensino de matemática estão em constante crescimento ao longo dos anos. Elas são ferramentas poderosas na compreensão dos conceitos matemáticos e existem indicativos claros, nos documentos oficiais, para integrar tais tecnologias no cotidiano escolar. Essa é uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental na Base Nacional Comum Curricular: “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267). Tal competência pode ser entendida como a integração de softwares educacionais no ensino de Matemática.

Um aplicativo ou software educacional é um recurso que qualquer professor pode utilizar, mesmo que não possua conhecimento avançado sobre dispositivos móveis, computadores ou programação. Em particular, pensando no ensino de Matemática, a ideia ao usar tais ferramentas é investigar propriedades e conceitos relacionados a um determinado assunto. Nesse contexto, Berleze (2007) apresenta onze atividades que abordam conceitos geográficos para trabalhar a variação de parâmetros da função seno por um viés dinâmico, com o auxílio do software Winplot. A autora realiza uma pesquisa de caráter investigativo, usando sua sala de aula como espaço de pesquisa, no qual instiga os estudantes a aprenderem sobre tal função trigonométrica e a variação de seus parâmetros. A pesquisadora aproveita-se da dinamicidade oferecida pelo Winplot e contextualiza as funções com a incidência dos raios solares na superfície terrestre.

Como o trabalho citado apresenta resultados positivos, este artigo objetiva realizar uma releitura de algumas atividades presentes em Berleze (2007), utilizando, para resolvê-las, ao invés do software Winplot, o software GeoGebra. A escolha pelo GeoGebra se deu por ser um software de Matemática Dinâmica (SMD) de fácil acesso e gratuito, além de proporcionar ambientes dinâmicos de aprendizagem Matemática para vários níveis de ensino.

Na pesquisa (BERLEZE, 2007), foi possível constatar que, inicialmente, os estudantes tinham dúvidas e inseguranças ao trabalhar com o software, mas apresentaram uma autonomia maior conforme as atividades aconteciam. Diante disso, espera-se, ao atualizar a tecnologia utilizada, possibilitar aos professores uma ideia de atividade que possa ser implementada em sala de aula, utilizando da exploração como motivação e do SMD como facilitador da aprendizagem e gerador de autonomia no aluno.

Sobre o software GeoGebra

Historicamente, as ferramentas tecnológicas têm desempenhado um papel importante no ensino da Matemática, desde ábacos até os dispositivos móveis, passando pelas calculadoras, computadores, quadros interativos e similares (AKCAY, 2017). Mais recentemente, os softwares que podem ser executados a partir de um navegador ou ferramentas baseadas na web tornaram-se muito populares. Os professores usam recursos como GeoGebra, Khan Academy e Youcubed para aprimorar a compreensão Matemática de seus alunos. Pesquisas como a de Kiefer, Mariani e Soares (2020) e Kessler (2015) observaram que a integração do GeoGebra na sala de aula de Matemática pode tornar esse espaço mais dinâmico, ao mesmo tempo em que incentiva nos alunos o desenvolvimento de habilidades, favorecendo a realização de procedimentos heurísticos essenciais na resolução de problemas.

Conforme Preiner (2008), o GeoGebra começou a ser desenvolvido em 2001, como projeto de mestrado de Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburg, Áustria. Após publicar um protótipo do software na Internet em 2002, professores na Áustria e na Alemanha começaram a usá-lo para ensinar Matemática, algo bastante inesperado pelo desenvolvedor, que recebeu muitos e-mails entusiasmados e o feedback positivo desses professores (HOHENWARTER; LAVICZA, 2007).

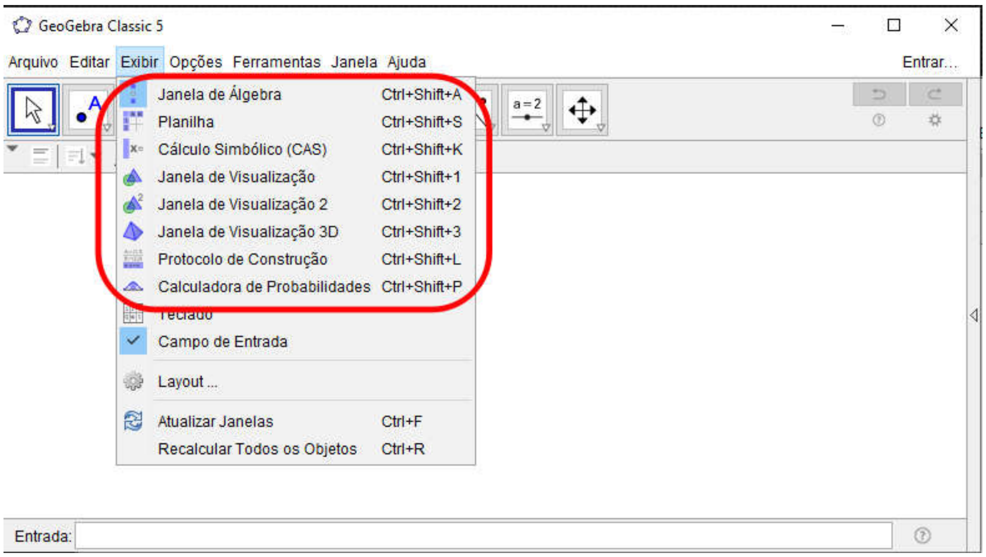
O GeoGebra possui características típicas de um Sistema de Álgebra Computacional (*Computer Algebra System*- CAS), como plotagem de gráficos de funções, localização de raízes, cálculo e representação gráfica de derivadas e de integrais (HOHENWARTER; PREINER, 2007). É devido a essas características que chamamos o GeoGebra de SMD, tendo em vista que foi desenvolvido para o ensino de Matemática, embora possa ser usado para outras ciências (KESSLER, 2015). As ferramentas disponíveis nesse ambiente são propícias para trabalhar conceitos de álgebra, geometria, cálculo e estatística.

Assim, utilizando esse SMD, os usuários podem criar atividades incorporando múltiplas representações de conceitos matemáticos que estão dinamicamente vinculados. O GeoGebra é composto por uma janela de álgebra, uma janela de gráficos (gráficos 2D e 3D) e uma barra de

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

entrada. Inclui, também, uma planilha, um CAS e ferramentas estatísticas e de cálculo (Figura 01).

Figura 01- Funcionalidades do SMD



Fonte: Sistematizado pelas autoras

De acordo com Caligaris, Schivo e Romiti (2015), o GeoGebra possui uma interface amigável e ferramentas que permitem aos professores criarem materiais que variam de simples gráficos a páginas web dinâmicas. Além disso, observa-se que esse SMD possui código aberto, é multiplataforma, multilíngue e permite salvar e exportar arquivos de saída em vários formatos, como por exemplo: ggb, html, xml, tikz e stl. Destaca-se, ainda, que o SMD possui uma comunidade internacional ativa de usuários que fornecem suporte técnico e compartilham de ideias.

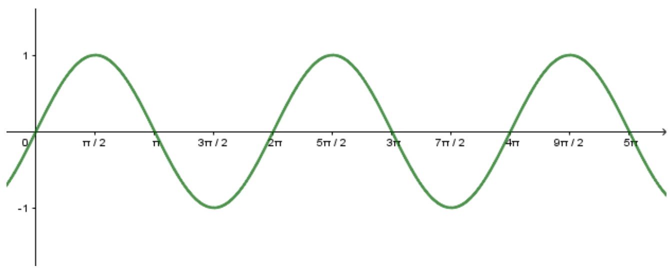
Sobre as Funções Trigonométricas

As principais funções trigonométricas estudadas na Educação Básica são as funções seno, cosseno e tangente. No entanto, neste artigo será dado um enfoque na função seno, já que Berleze (2007) a utilizou como parte da sua investigação e o intuito aqui é o de atualizar as atividades constantes em seu trabalho, propondo possibilidades de aplicação em sala de aula, utilizando o software GeoGebra.

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Ao encontro disso, salienta-se que a função seno é uma função periódica, ou seja, seu gráfico se repete a cada novo "período", com sucessão de fases crescentes e decrescentes, chamadas de flutuação. A flutuação tradicional da função seno é da forma crescente, decrescente, decrescente e crescente, isto é, a cada novo período, a função repete esses mesmos moldes, como ilustra a Figura 02.

Figura 02- Função seno



Fonte: Sistematizado pelas autoras

A função seno comumente tem sua forma geral representada por $f(x) = sen(x)$, podendo ser modificada para $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$, em que a, b, c e d são números reais (parâmetros) passíveis de alteração e modificam a aparência do gráfico da função.

Na função seno, o parâmetro a é chamado de eixo central, isto é, a partir desse valor, o gráfico crescerá e decrescerá, além de ser o ponto de partida da amplitude do gráfico, que será explicada posteriormente. Ao modificar esse parâmetro, percebe-se que a função sofre um deslocamento vertical. Quando $a > 0$, o gráfico da função é deslocado para cima, e quando $a < 0$, o gráfico da função é deslocado para baixo.

Com relação ao parâmetro b, ele define a amplitude da função seno. Isso significa que ele "comanda" o quanto o gráfico da função vai subir e o quanto vai descer. Assim, quando ele é alterado, a função sofre mudanças na sua amplitude. Se b aumenta, a amplitude do gráfico aumenta, e se b diminui, a amplitude do gráfico também diminui. A função seno tem sua flutuação invertida quando $b < 0$, ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser decrescente, crescente, crescente e decrescente.

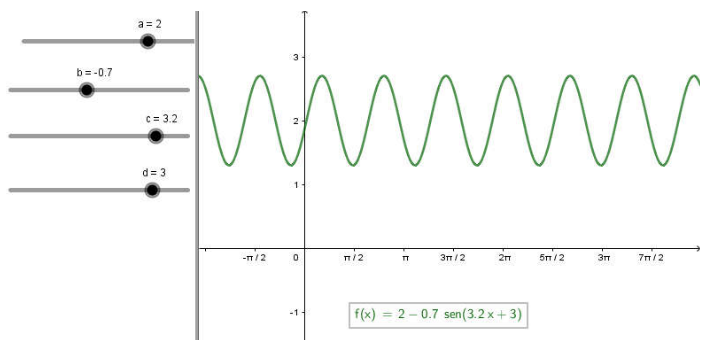
Acrescenta-se, ainda, que, ao mudar o parâmetro c, o gráfico da função sofre uma alteração no seu período. Quando aumenta-se o valor de c é aumentado, o período diminui com relação ao inicial, ou seja, a função vai repetir sua flutuação em um período menor para $c > 1$.

Em contrapartida, quando $0 < c < 1$, a função tem seu período aumentado e, assim, ele se torna maior que o inicial. Para valores de $c < 0$, tem-se que o período aumenta quando $c < -1$, e diminui quando $-1 < c < 0$, com o cuidado de que, para c negativo, ocorre a mudança da flutuação, também.

Para o parâmetro d, tem-se que a função sofre um deslocamento horizontal. Porém, esse deslocamento ocorre de forma não intuitiva, uma vez que os valores positivos parecem indicar um deslocamento para a direita, e os negativos, para a esquerda. O que realmente sucede, contudo, é exatamente o contrário. Quando $d > 0$, o gráfico da função desloca-se para a esquerda, e quando $d < 0$, desloca-se para a direita.

A figura 03 ilustra a variação dos parâmetros descritos acima.

Figura 03 - Função $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$



Fonte: Sistematizado pelas autoras

A escolha por apresentar possibilidades de estudar as funções trigonométricas surgiu em decorrência de que este é um dos principais tópicos do currículo de Matemática do Ensino Médio e constitui base de muitos cursos avançados de Matemática.

Propostas de Investigação

O trabalho tomado como base para este artigo (BERLEZE, 2007) foi aplicado em uma turma de 1º ano do Ensino Médio, com 14 alunos. A experimentação da autora em questão ocorreu no turno inverso às aulas, em períodos de 4 horas-aula semanais, durante 7 semanas, totalizando 7 encontros. Ademais, os alunos já possuíam conhecimento sobre funções e seus gráficos, sabendo construí-los com lápis e papel.

No experimento de Berleze (2007), foram realizadas atividades investigativas com a utilização do software Winplot para construir e analisar os gráficos das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas. Entretanto, no presente artigo, o foco será dado exclusivamente às funções trigonométricas, mais especificamente à função seno, em que Berleze(2007) propôs onze atividades. Estas relacionaram conceitos geográficos e matemáticos, aproveitando-se do viés dinâmico do software Winplot para estimular os estudantes a investigarem sobre a função seno e a variação de seus parâmetros.

Para a introdução das atividades, Berleze (2007) trouxe uma contextualização geográfica, uma vez que as atividades possuem um caráter interdisciplinar. Nesse sentido, destacou que, tendo em vista que a Terra é aproximadamente esférica, a luz que vem do Sol sempre incide perpendicularmente em algum ponto da superfície terrestre. Além disso, Berleze (2007) indica que, devido aos movimentos de rotação e de translação da Terra, a cada dia do ano, a luz do Sol é capaz de atingi-la perpendicularmente em círculos de latitudes diferentes, entre -23,5º e +23,5º. A latitude desses “círculos” de incidência perpendicular da luz do Sol é chamada de declinação (δ), e é função do dia do ano (d), onde este é um dia entre 1 e 365, correspondente ao dia Juliano: $\delta(d) = 23{,}5 \cdot sen[\frac{2\pi}{365} \cdot (d - 81)]$.

Ao encontro disso, a autora ressaltou que não é em toda a superfície da Terra que acontece de o Sol "ficar a pino" em algum dia do ano. Localidades a mais de 23,5º do Equador terrestre, ao norte ou ao sul, nunca têm o Sol a pino. Ademais, a latitude (declinação) obtida por meio da função pode variar de -23,5º a +23,5°. A latitude negativa está associada ao Hemisfério Sul (HS) e a positiva ao Hemisfério Norte (HN). Ainda, é possível calcular o ângulo entre o Sol e a vertical (ou normal), que é chamado ângulo zenital, de regiões onde o sol nunca fica a pino. Para isso, basta saber qual a latitude em que, naquele dia, os raios são perpendiculares ao solo (δ) e a latitude da cidade (ϕ). O ângulo zenital será o módulo da diferença entre essas duas latitudes: $|\delta - \phi| = \theta$.

De posse dessas informações, os estudantes já estavam aptos para a realização das atividades investigativas no software Winplot. Na presente pesquisa, as 11 atividades propostas e implementadas por Berleze (2007) foram revisitadas utilizando o software GeoGebra. No que segue, serão apresentadas nove das onze atividades pois foram consideradas mais interessantes e não repetiam os conceitos apresentados.

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Atualização das Atividades propostas para o software GeoGebra

Na primeira atividade proposta em Berleze(2007), ilustrada na Figura 04, a autora esperava que os estudantes conseguissem inserir o gráfico da função declinação no software Winplot. Além disso, deveriam utilizar o recurso “traço”, disponível no Winplot, para verificar em qual latitude os raios solares seriam perpendiculares na data solicitada e, posteriormente, verificar o sinal da latitude, respondendo quanto ao seu hemisfério.

Figura 04 – Atividade 1

1) Construa o gráfico da declinação em função do dia juliano, limitando o domínio da função para os valores informados no texto.

1.1) Verifique para qual declinação (latitude) os raios solares serão perpendiculares à superfície ao meio dia local de 14 de abril (104° dia juliano).

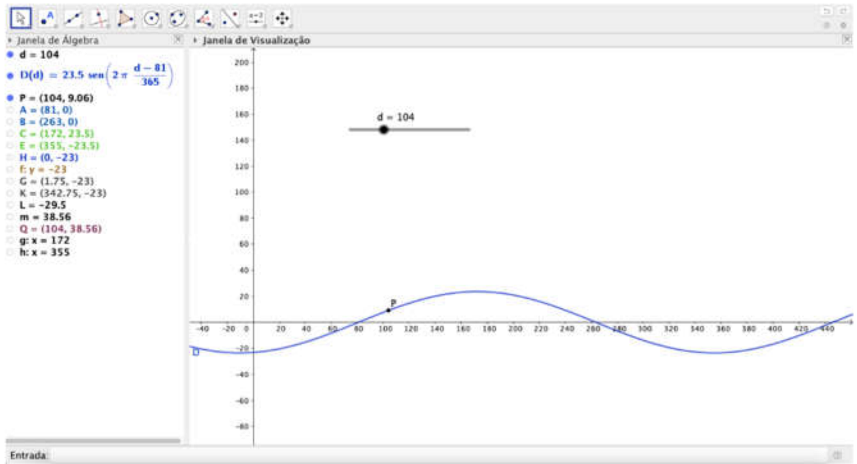
1.2) Esta latitude pertence ao Hemisfério Norte (HN) ou Sul (HS)?

1.3) Dentre as cidades citadas no texto, qual mais se aproxima desta latitude?

Fonte: Berleze (2007, p.173).

Assim, utilizando o software GeoGebra, criou-se um controle deslizante “d”, variando de 1 a 365, com incremento 1. Ele representaria os dias e a declinação seria em função desses dias. Depois, foi digitado, no campo de entrada, a expressão $D(d) = 23{,}5 \cdot sen(2\pi(d - 81)/365)$, que representa a função declinação. Por fim, foi construído um ponto P, de coordenadas (d, D(d)), que poderá auxiliar os alunos a encontrarem uma determinada declinação em um dia específico do ano (Figura 05).

Figura 05 - Construção da função declinação no GeoGebra



Fonte: sistematizado pelas autoras

Dessa forma, para solucionar o primeiro item da atividade 1 utilizando o GeoGebra, basta mover o controle deslizante “d”, que representa os dias, para o dia 104 e, analisando as coordenadas do ponto P, descobrir que, nesse dia, ao meio dia, os raios solares serão perpendiculares à superfície de um local com latitude correspondente a 9.06º. Ainda, verificando a positividade da latitude, conclui-se que se localiza no Hemisfério Norte, respondendo ao segundo item. Já o terceiro item poderia ser respondido por meio da visualização de uma tabela fornecida por Berleze (2007), relacionando cada cidade e a sua respectiva latitude. Nesse caso, a latitude mais próxima a 9,06º era 9º N e correspondia à cidade de São José (Costa Rica).

A segunda atividade proposta em Berleze (2007) foi resolvida sem o uso do Winplot. Dessa forma, não foi necessária nenhuma atualização. Com relação à terceira atividade (Figura 06), os alunos foram solicitados a preencher uma tabela indicando as datas (dias julianos) e as declinações nos solstícios e equinócios.

Figura 06 – Terceira atividade

3) Os pontos do gráfico com declinações máximas e nulas coincidem com os dias dos Solstícios e Equinócios. Dada as informações na tabela abaixo, complete com o que falta:

	Datas	Dias julianos	Declinação
Equinócio de Outono(HS)/Primavera(HN)	21/22 de Março	80/81	
Solstício de Inverno(HS)/Verão(HN)	21/22 de Junho		+23,5º
Equinócio de Primavera(HS)/Outono(HN)	22/23 de Setembro		0º
Solstício de Verão(HS)/Inverno(HN)	21/22 de Dezembro	355/356	

HS = Hemisfério Sul; HN = Hemisfério Norte

Fonte: Berleze (2007, p.174).

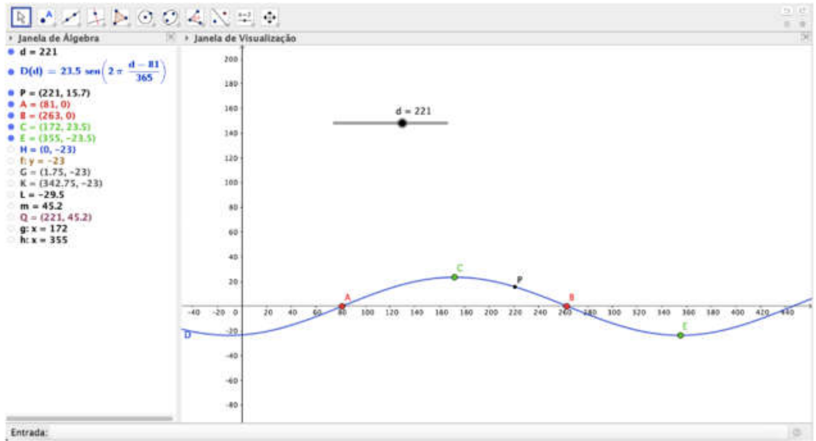
Vale destacar que Berleze (2007) explorou junto a seus alunos, a ideia de solstício e equinócio inicialmente, explicando aos estudantes o que seria cada um desses fenômenos. Para complementar, a questão também trouxe uma indicação da caracterização dos solstícios e equinócios, como pontos de declinações máximas e nulas.

Para solucionar a questão utilizando o software GeoGebra, recorreu-se ao controle deslizante, movendo-o para os dias 80/81 e 355/356. Percebeu-se que, nesses dias, a declinação era de 0º e -23.5º, respectivamente. Para os quadros intermediários, onde é fornecida a declinação, apenas observou-se o gráfico e moveu-se o ponto P para as declinações citadas, a fim de confirmar a suposição visual. Assim, chegou-se à conclusão de que os dias 172/173 e 263/264 possuem a declinação de 23.5º e 0º, respectivamente.

Observa-se que os dias dos equinócios correspondem às raízes da função e os solstícios representam seus pontos de máximo e mínimo. Para representar esses pontos no GeoGebra, utilizou-se A e B para as raízes e C e E para os pontos de máximo e mínimo, respectivamente, durante um período da função seno (Figura 06) .

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

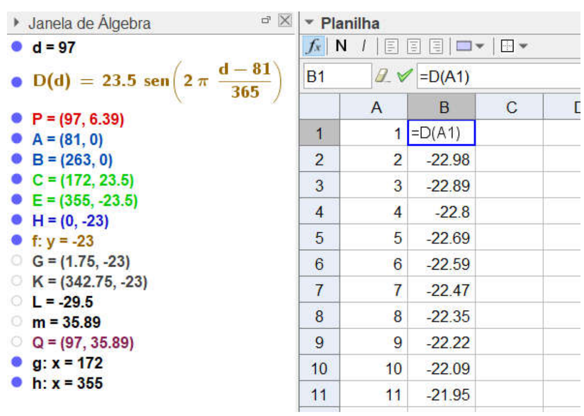
Figura 06 - Raízes da função como equinócios e pontos de máximo e mínimo como solstícios.



Fonte: Sistematizado pelas autoras

Berleze (2007) solicitou que os alunos completassem uma tabela. Na versão atualizada que consta no presente artigo, usando o GeoGebra, utilizou-se a ferramenta planilha para resolver a questão, como ilustra a Figura 07.

Figura 07 - Planilha no GeoGebra



	A	B	C
1	1	=D(A1)	
2	2	-22.98	
3	3	-22.89	
4	4	-22.8	
5	5	-22.69	
6	6	-22.59	
7	7	-22.47	
8	8	-22.35	
9	9	-22.22	
10	10	-22.09	
11	11	-21.95	

Fonte: Sistematizado pelas autoras

A quarta atividade apresentada em Berleze (2007) questiona os alunos com relação a uma determinada cidade e a possibilidade desta ter o sol a pino mais de uma vez no ano. Essa questão instiga o aluno a perceber que, dado o caráter periódico da função, cada uma das cidades com latitudes entre 23.5º e -23.5º, respectivamente os pontos de máximo e mínimo da função, possuiria dois dias onde o sol estaria a pino e os raios solares incidiriam perpendicularmente à superfície duas vezes. Para resolvê-la utilizando o GeoGebra, basta movimentar o controle deslizante construído para resolver a atividade anterior.

A quinta atividade (Figura 08) envolve o conceito de ângulo zenital, apresentado aos alunos em Berleze (2007) na introdução dos trabalhos. Ademais, destaca-se que essa atividade pode ser uma das mais complexas para os alunos no que diz respeito à descoberta de como resolvê-la.

Figura 08 – Atividade 05

5) Hoje é dia 30 de outubro, equivalente ao 303° dia juliano e os raios solares estão perpendiculares à superfície terrestre na latitude de 14,7°S. Sabendo-se que Santa Maria está localizada a 29,7°S, descubra qual o ângulo formado entre o Sol e a vertical (ângulo zenital) ao meio dia local do dia de hoje.

5.1) Verifique qual será, ao longo do ano, o maior ângulo zenital visto em Santa Maria e para que dia ele ocorre.

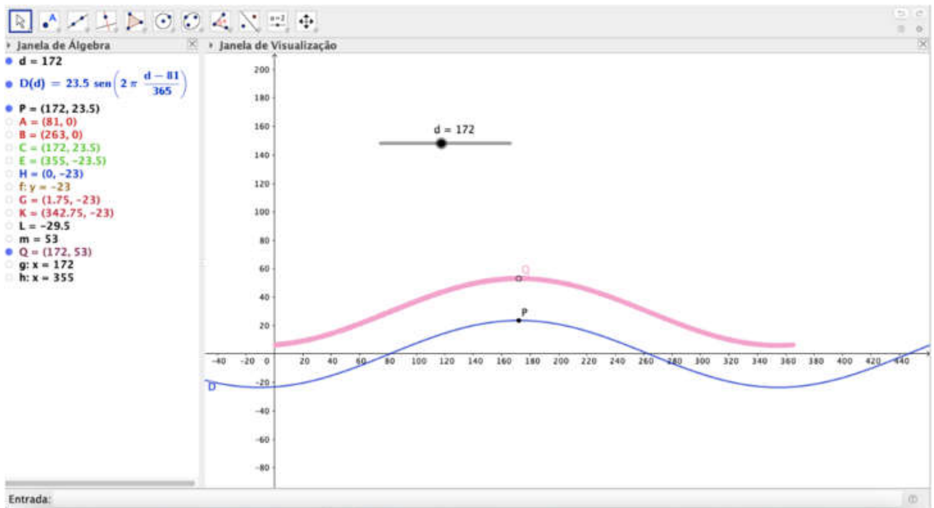
5.2) Verifique qual será, ao longo do ano, o menor ângulo zenital visto em Santa Maria e para que dia ele ocorre.

Fonte: Berleze (2007, p.175).

Para calcular, utilizou-se a fórmula $|\delta - \phi| = \theta$, onde δ representa a declinação (latitude) do local onde o sol está a pino hoje, ϕ representa a latitude de Santa Maria e θ o ângulo zenital procurado. Com relação ao primeiro item da atividade, inicialmente, deve-se inserir, no GeoGebra, um número L = -29.5, que corresponde a latitude de Santa Maria, e posteriormente, um número m = |D(d) - L|. Feito isso, inclui-se, também, um ponto Q = (d, m) e ativa-se o rastro deixado por ele (Figura 09).

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Figura 09 - Maior ângulo zenital



Fonte: Sistematizado pelas autoras

Nesse sentido, pode-se perceber que o gráfico da declinação era paralelo ao rastro, logo, o valor m (que corresponde a coordenada y de Q), seria o máximo para a mesma coordenada de x onde a declinação era máxima. Assim, percebe-se que o maior ângulo zenital ocorre no dia 172 e corresponde a 53º (Dia do solstício de inverno do hemisfério sul). Já o segundo item foi resolvido de forma análoga, apenas analisando o ponto de mínimo da declinação.

A partir da sexta atividade, inicia-se uma nova fase na pesquisa, onde as atividades começam a possuir um caráter muito mais matemático do que geográfico, envolvendo investigações sobre as mudanças ocorridas na função seno por meio do acréscimo de parâmetros.

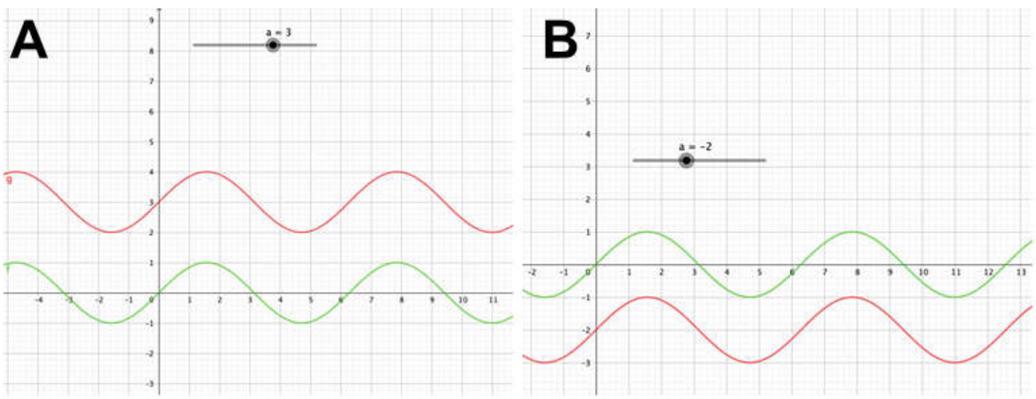
Nessas atividades, os recursos utilizados no software GeoGebra são bem semelhantes aos que foram explorados no Winplot (BERLEZE, 2007), em que a pesquisadora teve por objetivo a compreensão, por parte dos estudantes das noções de translação vertical e horizontal, período, amplitude e flutuação. Especificamente na atividade seis, o estudante é convidado a construir os gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = a + sen(x)$, no Winplot e utilizar o recurso “animação” para o parâmetro a, presente naquele recurso.

Assim, no GeoGebra, inicialmente, construiu-se um controle deslizante “a”, variando de -10 até 10. Posteriormente, inseriu-se, na caixa de entrada, as duas funções solicitadas. Dessa forma, para resolver a questão, basta mover o controle deslizante, fazendo "a" assumir tantos

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

valores positivos quanto negativos. Percebe-se, assim, que o gráfico da função g tem uma translação vertical para cima e para baixo, respectivamente, quando comparado com o gráfico de f (Figura 10A e B).

Figura 10 –Translação vertical para cima (A) e Translação vertical para baixo (B)



Fonte: Sistematizado pelas autoras

Além das translações observadas, destaca-se a mudança do eixo central quando são feitos esses deslocamentos verticais, uma vez que o eixo central acompanha o valor do parâmetro a.

Com relação à sétima atividade proposta, o parâmetro b foi considerado. Nesse sentido, no software Geogebra, construiu-se um controle deslizante “b”, variando de -10 até 10 com. Posteriormente, construiu-se as duas funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(x + b)$. Ressalta-se que, nessa atividade, os alunos devem perceber o conceito de deslocamento horizontal, sendo importante que o professor questione, em um primeiro momento, suas expectativas com relação à mudança desse parâmetro, já que possuem a experiência relacionada ao parâmetro a .

Na questão citada, é interessante perceber as conjecturas dos alunos, pois, uma vez que percebem que a função terá um deslocamento horizontal, é contraintuitivo pensar que valores positivos deslocarão a função para a esquerda e negativos para a direita. Uma proposta relevante seria abordar o porquê desse movimento, utilizando exemplos em sala de aula após a pesquisa.

A oitava atividade (Figura 11) inicia propondo uma nova investigação, na qual o aluno deveria verificar mudanças na estrutura do gráfico da função, isto é, mais do que apenas deslocamentos verticais e horizontais, mas contrações e dilatações.

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Figura 11 - Atividade 8

8) Construa os gráficos de f(x)=sen(x) e g(x)= c.sen(x) e, usando animação no parâmetro c, responda:

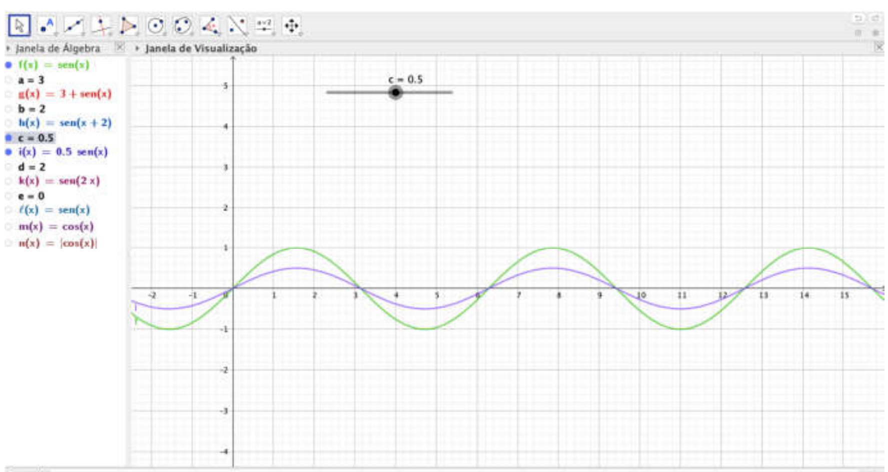
8.1) Faça c assumir valores positivos entre 0 e 1. Você acha que, comparados ao gráfico de f, os gráficos de g estão mais encolhidos ou alongados na direção vertical?

8.2) Faça c assumir valores positivos maiores do que 1. Você acha que, comparados ao gráfico de f, os gráficos de g estão mais encolhidos ou alongados na direção vertical?

Fonte: Berleze (2007, p.178).

Para solucionar essa atividade, inicialmente, no GeoGebra, construiu-se um controle deslizante "c", variando de -5 até 5. Posteriormente, inseriu-se as duas funções solicitadas no GeoGebra. Quando o parâmetro c assume valores positivos entre 0 e 1, percebe-se que os gráficos estão contraídos, ou seja, a imagem de $g(x)$ foi alterada para um intervalo menor que a imagem de $f(x)$ (Figura 12).

Figura 12 - Gráfico de $g(x)$ contraído quando comparado a $f(x)$



Fonte: Sistematizado pelas autoras

Já quando o parâmetro "c" é definido como um valor positivo maior do que 1, os gráficos estão mais alongados, ou seja, a imagem de $g(x)$ foi alterada para um intervalo maior

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

que a imagem de $f(x)$. Finalmente, quando c = -1, podemos perceber que a função sofre uma inversão completa, isto é, fica simétrica com relação ao eixo x. Algumas observações são que as duas funções possuem o mesmo domínio, o mesmo conjunto imagem e as mesmas raízes. Entretanto, onde a função $f(x)$ possui pontos de máximo, a função $g(x)$ possui pontos de mínimo e vice-versa.

Destaca-se que, na análise realizada em Berleze(2007) referente à questão 8, foram feitas outras perguntas. O estudante deveria fazer o parâmetro "c" assumir valores negativos entre 0 e -1, valores negativos menores do que -1 e realizar as mesmas investigações no que se refere ao alongamento ou ao encolhimento do gráfico da $g(x)$ em relação a $f(x)$. Isso ocorreu, pois a pesquisadora pretendia que o aluno percebesse que as contrações e os alongamentos da função não dependiam do sinal que o parâmetro c assume, mas do seu valor absoluto.

Finalmente, Berleze (2007) questionou aos alunos a relação do módulo de c e ao conjunto imagem da função (Figura 13), pretendendo que o estudante compreendesse a relação entre o conjunto imagem e o valor absoluto do parâmetro

Figura 13 - Questões sobre o valor absoluto de c

8.6) Resumindo: o que acontece com o gráfico de g, comparativamente ao de f, quando |c|>1? E quando |c|<1?

8.7) Observe que a função f varia de [-1,1]. Qual o conjunto imagem da função g?

8.8) Comparando os zeros das funções f e g, o que você pode concluir?

Fonte: Berleze (2007, p.179).

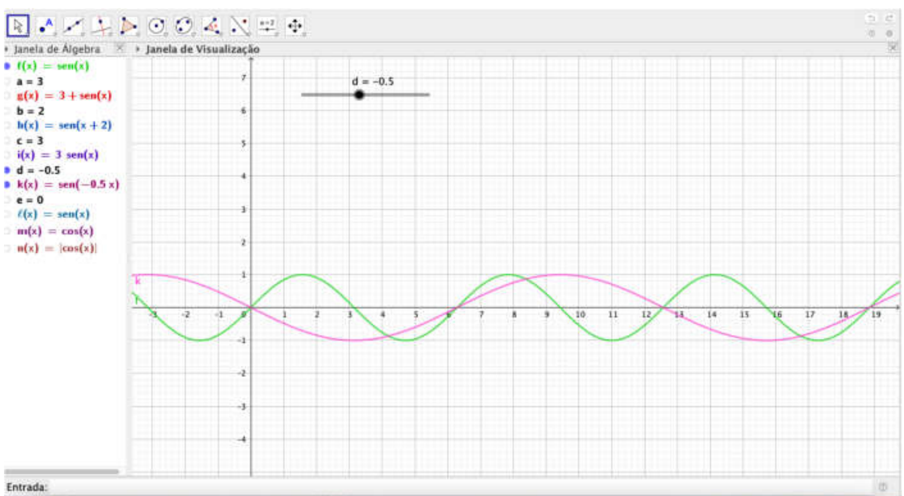
Destaca-se, ainda, que em Berleze (2007), em nenhum momento é citado o termo "amplitude". Isso possibilitou aos alunos tirarem suas próprias conclusões a partir da investigação, para depois formalizarem os termos e os conceitos.

A nona atividade envolveu o último parâmetro a ser analisado, a saber, o parâmetro d. Nessa tarefa, os alunos deveriam criar as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(d \cdot x)$ e verificar o que acontece quando se modifica o parâmetro d.

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Da mesma forma que o parâmetro c, a pesquisadora também questiona sobre os valores absolutos do parâmetro d, uma vez que modificações no sinal fazem a função inverter-se, mas os valores absolutos em si possuem propriedades em comum com relação ao alongamento ou à compressão horizontal do gráfico. Dessa forma, quando $|d| < 1$, o gráfico da função $g(x)$, quando comparado com o gráfico da função $f(x)$, fica alongado horizontalmente. Já quando $|d| > 1$, o gráfico da função $g(x)$, quando comparado com o gráfico da função $f(x)$, fica contraído horizontalmente. Relacionado ao conjunto imagem da função, nota-se que essa transformação não altera o conjunto imagem, como ilustra a Figura 14.

Figura 14 - Gráfico da função $g(x)$ alongado horizontalmente



Fonte: Sistematizado pelas autoras

A penúltima atividade compara os gráficos das funções seno e cosseno, buscando que o aluno compreenda que eles são semelhantes, apenas com uma diferença de deslocamento (Figura 15).

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Figura 15 – Atividade 10

10) Construa os gráficos de f(x)=sen(x+b) e g(x)=cos(x). Inicialmente, faça b=0. Note que os dois gráficos são muito parecidos, porém, não coincidentes. Anime o parâmetro *b* e descubra qual seu menor valor positivo para o qual os dois gráficos coincidem.

Fonte: Berleze (2007, p.185).

Para resolver essa questão no GeoGebra, construiu-se um controle deslizante “e”, variando de -5π a 5π e com incremento igual a $\frac{\pi}{2}$. Depois, inseriu-se as funções solicitadas, alterando “b” por “e”. Com e = 0, percebeu-se que a função seno possui a mesma curva da função cosseno deslocada horizontalmente. Como já visto antes, se o parâmetro “e” for modificado, a função terá um deslocamento horizontal, então bastará saber quanto é preciso deslocar para que as funções tenham gráficos coincidentes. Assim, animando o controle deslizante, consegue-se perceber que o menor valor positivo de “e” para que os gráficos sejam coincidentes é $\frac{\pi}{2}$.

Finalmente, a última atividade proposta em Berleze (2015) apresenta a comparação entre o gráfico da função $f(x) = cos(x)$ e o da $g(x) = |cos(x)|$, questionando os estudantes em relação ao sinal da função $g(x)$, bem como se é possível obtê-la por meio de uma reflexão de partes do gráfico de $f(x)$ (Figura 16).

Figura 16 - Atividade 11

11) Construa os gráficos das funções f(x)=cos(x) e g(x)=|cos(x)|. No *Winplot*, a função g dada pode ser introduzida como abs(cos(x)).

11.1) O que você pode observar sobre o sinal da função g?

11.2) É correto concluir que o gráfico de g pode ser obtido traçando-se o gráfico de f e refletindo em torno do eixo x os pontos de ordenadas negativas?

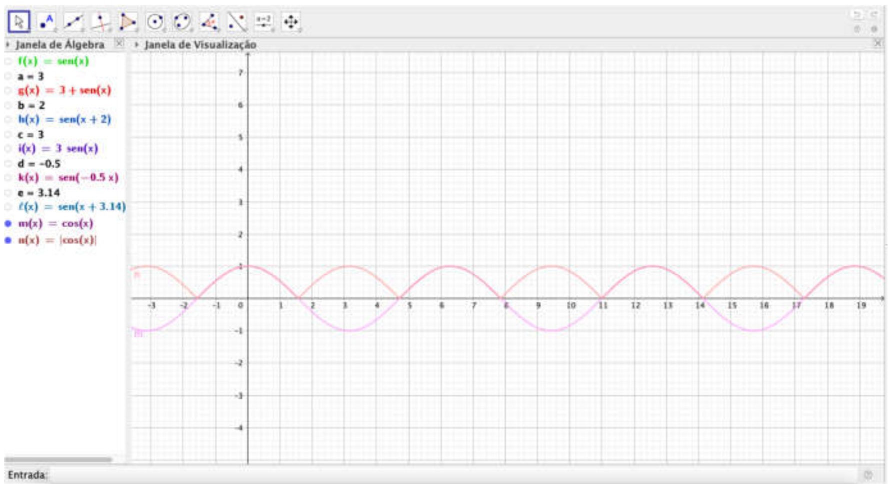
Fonte: Berleze (2007, p.186).

Nessa atividade, a análise que deve ser feita com relação ao sinal da função $g(x)$ é que ela sempre possui valores maiores ou iguais a zero, uma vez que o módulo exige os valores

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

absolutos (positivos). Ademais, observando-se com cuidado, percebe-se que é possível obter o gráfico da função $g(x)$ a partir do gráfico da $f(x)$, desde que sejam refletidos em torno do eixo x os pontos de ordenadas negativas da função (Figura 17).

Figura 17 - Obtenção do gráfico de $g(x)$ a partir do gráfico da $f(x)$



Fonte: Sistematizado pelas autoras

Portanto, a partir dessa atividade transposta do software Winplot para o software GeoGebra, percebe-se a facilidade em construir questões e atividades investigativas que possam introduzir o conhecimento dos parâmetros das funções. Ressalta-se, ainda, a variedade de propostas possíveis de serem feitas no âmbito da investigação dos parâmetros, utilizando-se, para tanto, o software GeoGebra, que não se restringe apenas à função seno, mas abre um leque de possibilidades referentes às mais diversas funções.

Considerações Finais

Atualmente, o impacto das tecnologias aumenta em todas as áreas e, consequentemente, a educação não pode ficar fora. Este artigo teve como objetivo realizar uma releitura de algumas atividades presentes em Berleze (2017), trazendo-as para os dias atuais, com a substituição do software Winplot pelo GeoGebra. O intuito da pesquisa não foi realizar um comparativo entre os softwares utilizados, mas resolver as atividades empregando um SMD ao invés de um software de plotagem de gráficos.

Rev. Bras. de Iniciação Científica (RBIC), IFSP Itapetininga, v.8, e021042, p. 1-21, 2021.

Nesse sentido, observa-se que o Winplot não é um software obsoleto, longe disso. Ele continua firme no propósito ao qual se destina. Porém, a última versão publicada desse software foi a de 2012 e, após a morte do seu desenvolvedor Rick Parris, não existe nenhum site oficial onde seja possível realizar o download da ferramenta. Dessa forma, acredita-se importante mostrar uma alternativa usando um software disponível e acessível, como é o caso do GeoGebra.

No trabalho realizado há quase quinze anos (BERLEZE, 2017), foi possível constatar que, nas primeiras atividades, os estudantes tinham dúvidas e inseguranças ao trabalhar com o software, solicitando, frequentemente, a ajuda da pesquisadora para confirmação das soluções encontradas. Porém, conforme as atividades aconteciam, os estudantes apresentaram uma autonomia maior, tornando-se independentes ao utilizar o software.

Diante disso, nosso intuito é realizar uma implementação em sala de aula, a qual não foi possível, visto a situação pandêmica enfrentada. Pretendia-se, com isso, verificar se as atividades investigativas com o uso de SMD continuam com potencial de elevar a autonomia dos estudantes, desta vez, utilizando o GeoGebra.

Referências

AKCAY, A. O. Instructional Technologies and Pre-Service Mathematics Teachers' Selection of Technology. **Journal of Education and Practice**, v. 8, n. 7, p. 163-173, 2017.

BERLEZE, C. S. Uma seqüência de ensino usando o programa WINPLOT: em busca de uma aprendizagem autônoma do aluno. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CALIGARIS, M. G.; SCHIVO, M. E.; ROMITI, M. R. . Calculus & GeoGebra, an interesting partnership. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, v. 174, p. 1183-1188, 2015.

HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, v. 27, n. 3, p. 49-54, 2007. Recuperado de https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-27-3-09.pdf

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

HOHENWARTER, M.; PREINER, J. Dynamic mathematics with GeoGebra. Journal of Online Mathematics and its Applications. **MAA, ID**, v. 1448, 2007. Recuperado de https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

KESSLER, A. L. de F. et al. APLICAÇÕES DE FUNÇÕES NA ÁREA DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA POR MEIO DO GEOGEBRA. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, p. 151. 2015.

KIEFER, J. G.; MARIANI, R. de C. P.; SOARES, M. A. da S.. ÁREA DE HEXÁGONOS ATRAVÉS DA DECOMPOSIÇÃO EM TRIÂNGULOS: UM ESTUDO A PARTIR DO SOFTWARE GEOGEBRA. **RENOTE**, v. 18, n. 1, 2020

PREINER, J. Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: the case of GeoGebra (Doctoral dissertation in Mathematics Education, University of Salzburg, Salzburg, Austria). 2008. Recuperado de http://www. pucrs. br/ciencias/viali/tic_ literatura/teses/Preiner_Judith. pdf,