Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Custo de diferenciação de produtos em um duopólio de Cournot com demandas de Lancaster por produtos diferenciados

Product differentiation cost in a Cournot Duopoly with Lancaster demands for differentiated products

Costo de diferenciación de productos en un duopolio de Cournot con demandas de Lancaster de productos diferenciados

Pedro Henrique Schneider Ortiz[1]
João Plínio Juchem Neto[2]

Resumo: O objetivo do presente artigo é introduzir custos de diferenciação de produtos em um duopólio de Cournot a fim de responder a seguinte pergunta, que inspira esta pesquisa: custos de diferenciação geram equilíbrios com diferenciação parcial de produtos, fato observado em mercados reais? Do ponto de vista metodológico adotamos uma modelagem microeconômica de duopólio associada à demanda de Lancaster por produtos diferenciados. Como resultados mostramos que existe um valor crítico para o custo máximo de diferenciação de produtos de forma que, se tais custos são menores do que tal valor crítico, o modelo prevê lucro máximo com diferenciação total dos produtos; já se tais custos são maiores do que tal valor crítico pode haver diferenciação nula, se o custo de diferenciar aumentar rapidamente com o grau de diferenciação, ou diferenciação parcial de produtos, se o custo de diferenciar aumentar mais lentamente com o grau de diferenciação de produtos.
Palavras-chave: Organização industrial. Microeconomia. Duopólio de Cournot. Diferenciação de produtos. Custos de diferenciação.

Abstract: The objective of this article is to introduce product differentiation costs in a Cournot duopoly in order to answer the following question, which inspires this research: do differentiation costs generate equilibria with partial product differentiation, a fact observed in real markets? From a methodological point of view, we adopted a microeconomics modeling of duopoly associated with Lancaster's demand for differentiated products. As a result, we show that there is a critical value for the maximum cost of product differentiation, so that, on one hand, if such costs are lower than this critical value, the model predicts maximum profit with full product differentiation; on the other hand, if such costs are higher than this critical value, there may be no differentiation, if the cost of differentiation increases rapidly with the degree of differentiation, or partial product differentiation, if the cost of differentiation increases more slowly with the degree of product differentiation.
Keywords: Industrial organization. Microeconomics. Cournot duopoly. Product differentiation. Differentiation costs.

[1] Bacharelando em Ciências Econômicas. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). https://orcid.org/0009-0007-8260-9213. E-mail: phsortiz@gmail.com.
[2] Doutor em Matemática Aplicada. Professor no Departamento de Economia e Relações Internacionais da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). https://orcid.org/0000-0002-7640-6539. E-mail: plinio.juchem@ufrgs.br.

Revista brasileira de iniciação científica

ISSN: 2359-232X

Resumen: El objetivo de este artículo es introducir los costos de diferenciación de productos en un duopolio de Cournot para responder a la siguiente pregunta, que inspira esta investigación: ¿los costos de diferenciación generan equilibrios con diferenciación parcial de productos, un hecho observado en los mercados reales? Desde un punto de vista metodológico, adoptamos un modelo microeconómico de duopolio asociado a la demanda de Lancaster de productos diferenciados. Como resultado, mostramos que existe un valor crítico para el coste máximo de diferenciación de producto, de modo que si dichos costes son inferiores a este valor crítico, el modelo predice el máximo beneficio con la diferenciación completa; por otro lado, si dichos costes son superiores a este valor, puede no haber diferenciación, si el coste de diferenciación aumenta rápidamente con el grado de diferenciación, o diferenciación parcial de producto, si el coste de diferenciación aumenta más lentamente con el grado de diferenciación.

Palabras-clave: Organización industrial. Microeconomía. Duopolio de Cournot. Diferenciación de productos. Costos de diferenciación.

Submetido 22/03/2025 **Aceito 07/07/2025** **Publicado 16/07/2025**

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Considerações iniciais

Organização Industrial é o ramo da Economia que estuda o funcionamento de mercados e indústrias, dando ênfase à forma como as firmas competem entre si, em especial quando atuando em mercados de concorrência imperfeita. Para tanto, se utiliza de instrumental microeconômico a fim de analisar competição em preço, quantidade, qualidade, diferenciação de produtos, propaganda e pesquisa e desenvolvimento (Cabral, 2000; Shy, 1995).

O instrumental microeconômico utilizado em tal análise se aproveita de modelos estabelecidos para definir diferentes estruturas de organização de um mercado, tal como os modelos de concorrência monopolística (utilizado quando há muitas firmas no mercado, diferenciando produtos) e os modelos de oligopólio, quando há poucas firmas presentes no mercado, diferenciando ou não os produtos produzidos (Shy, 1995). De especial interesse para este trabalho é o duopólio (ou oligopólio) de Cournot, que é um dos modelos mais amplamente estudados de concorrência imperfeita, no qual duas (ou mais) firmas competem entre si, sendo que cada uma leva em consideração as possíveis respostas de suas concorrentes ao decidir a quantidade a produzir de um produto homogêneo, sempre almejando a maximização de lucros (Nicholson e Snyder, 2012). Trabalhos recentes propõem uma versão do duopólio de Cournot considerando produtos objetivamente diferenciados (Puu, 2017, 2018; Juchem Neto, 2023, 2024; Voelkening, 2024), utilizando para tanto o formalismo introduzido por Lancaster (1966, 1971).

No presente trabalho teremos de nos desviar da teoria de demanda tradicional adotada na literatura microeconômica (Nicholson e Snyder, 2012), na qual os produtos ou bens são considerados homogêneos. Assim, adotaremos a teoria de demanda de Lancaster (1966, 1971), pela necessidade de expressarmos a diferenciação de bens, característica típica de mercados de concorrência imperfeita, especificamente da concorrência monopolística e oligopolista, sendo variável chave para as firmas garantirem um quase-monopólio sobre fatias de mercado, um resultado que, sob determinadas circunstâncias, procuraremos obter com o modelo proposto neste trabalho.

Na teoria da demanda de Lancaster (1966, 1971), os consumidores derivam sua utilidade das características ou propriedades dos bens consumidos – e não da quantidade total consumida dos produtos finais, como na teoria tradicional. Esta teoria da demanda alternativa considera matematicamente a composição objetiva dos bens, que são descritos por vetores de características, o que por sua vez garante a possibilidade de modelarmos bens nos mais variados graus de diferenciação.

A fim de clarificar quanto às diferenças entre as teorias de demanda tradicional e de Lancaster, cabe utilizarmos de um exemplo no mercado de automóveis. A fim de simplificar a exposição, vamos considerar que um carro pode ser descrito por apenas duas características: potência de seu motor e seu espaço interno, incluindo porta malas, para tomar um exemplo apresentado por Pindyck e Rubinfeld (2006). Consumidores nem sempre irão comprar um automóvel pela mesma razão, alguns consumidores (provavelmente mais jovens e solteiros) escolherão o carro pela maior potência, mais esportivos, e outros consumidores (provavelmente com uma família maior), preferirão carros com maior espaço interno. De qualquer modo, uma vez dividida a demanda por estes dois tipos de carros, a teoria convencional considera que os respectivos tipos de consumidores irão maximizar uma função de utilidade que é função crescente da quantidade de carros consumida, i.e., quanto mais carros consumirem, melhor. Porém, este não é um comportamento muito usual dos consumidores de carros: com exceção de colecionadores, os consumidores de carros na maior parte das vezes irão comprar apenas um carro, porém irão tentar maximizar uma função de utilidade que depende das características do carro, conforme suas preferências.

Continuando no exemplo do parágrafo acima, a teoria de Lancaster descreveria determinado automóvel por um vetor de dois elementos, composto pela potência do motor e espaço interno, postulando que o consumidor irá maximizar sua utilidade em função destas características, sujeito a uma restrição orçamentária. Assim, tal teoria permite descobrir qual será o carro escolhido pelo consumidor, dadas suas preferências pelas características que constituem o bem.

Outra potencialidade da teoria de Lancaster se encontra na caracterização de bens substitutos e complementares, desafio conhecido da Microeconomia tradicional, uma vez que estes podem ser constituídos como bens com composições semelhantes (substitutos) ou cada um dotado de propriedades ausentes no outro (complementares). A teoria da demanda de Lancaster constitui, assim, um ferramental teórico excepcional que pode contribuir enormemente em variadas áreas da ciência, em especial na área de Organização Industrial, dedicada à análise da concorrência em diferentes estruturas de mercado (Shy, 1995).

Utilizando do ferramental descrito acima, i.e. da teoria da demanda de Lancaster, Juchem Neto (2023) propõe, baseado nos trabalhos anteriores de Puu (2017, 2018), uma parametrização em uma variável para duas características que compõem dois produtos finais em um duopólio de Cournot, mostrando que as firmas obtêm lucro máximo diferenciando completamente os produtos, i.e., com cada produto apresentando apenas uma das características, desde que os custos marginais de produção das firmas sejam iguais ou semelhantes. Já no caso em que uma firma é muito mais eficiente do que a outra, apresentando custo marginal substancialmente menor, a firma mais eficiente obteria lucro máximo produzindo um produto com a mesma quantidade das duas características, enquanto sua concorrente mais ineficiente auferiria lucro máximo utilizando apenas uma das características em seu produto. Neste último cenário não é possível encontrar um design de produto que maximize o lucro de ambas as firmas simultaneamente. No caso do exemplo do automóvel, isto significa que a firma mais eficiente teria lucro máximo produzindo um carro mais equilibrado, apresentando boa potência e bom espaço interno, enquanto a menos eficiente teria um resultado ótimo produzindo um carro totalmente focado em potência (mais esportivo, com motor muito potente, porém pouco espaço interno) ou alternativamente um carro totalmente familiar, com muito espaço interno, porém com motor menos potente.

Uma limitação do modelo considerado em Juchem Neto (2023) é o fato das firmas apresentarem lucro máximo apenas para produtos totalmente diferenciados ou homogêneos, refletindo apenas os cenários nos quais as firmas competem em concorrência perfeita ou não competem, cada uma buscando um mercado específico. Na realidade vemos toda uma gama de diferenciação de produtos em vários mercados, como nos de vestuário, cultural, automotivo, de imóveis, etc. Uma possível explicação para esta limitação de seus resultados é o fato daquele trabalho não considerar custos associados à diferenciação dos produtos, os quais sempre estão presentes em qualquer processo produtivo, uma vez que alterações nos produtos implicam nas mais variadas transformações na produção, que incorrerá em novos custos. Sendo assim, o objetivo principal do presente artigo teórico é introduzir tal custo de diferenciação de produtos no modelo proposto em Juchem Neto (2023), a fim de verificar se tal hipótese adicional é capaz de gerar resultados de equilíbrio do duopólio de Cournot com produtos parcialmente diferenciados.

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Modelo de duopólio de Cournot com custo de diferenciação de produtos

Para análise do duopólio, consideraremos o problema do consumidor conforme a teoria da demanda de Lancaster (1966, 1971), tal como apresentada em Puu (2017, 2018), no qual temos dois produtos, cujas quantidades são $q_1 \geq 0$ e $q_2 \geq 0$, dotados de duas características, cujas quantidades são denotadas por $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Aqui seguiremos a parametrização em uma variável das características proposta em Juchem Neto (2023, 2024), também considerando que a firma 1 produz apenas o bem 1, enquanto a firma 2 produz apenas o bem 2. Nesta parametrização, $a \in [0,1]$ indica a quantidade da característica 1 (2) presente em uma unidade do bem 1 (2); enquanto seu complemento $(1-a)$ indica a quantidade da característica 1 (2) presente em uma unidade do bem 2 (1). Sendo assim, a relação linear entre as quantidades dos produtos e características é dada por:

$$x_1 = aq_1 + (1-a)q_2, \tag{1}$$

$$x_2 = (1-a)q_1 + aq_2. \tag{2}$$

Com esta parametrização, vemos que $a = \frac{1}{2}$ renderá produtos iguais, isto é, igualmente dotados de ambas as características, enquanto os casos $a = 1$ ou $a = 0$ representam produtos totalmente diferenciados, cada um dotado de apenas uma das características. Esta escolha de modelagem, cujo objetivo é manter a simplicidade algébrica do modelo, significa que a decisão de *design* dos produtos, capturada pelo valor deste parâmetro a, não é independente para cada firma: a escolha de a determina, simultaneamente, o *design* dos produtos 1 e 2. Desta forma,

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

as duas firmas devem estar de acordo quanto à escolha de a, i.e., devem diferenciar os produtos conjuntamente.

Podemos, agora, prosseguir à solução do problema do consumidor, o qual é dado pelo seguinte problema de maximização restrita, considerando uma função de utilidade de Cobb-Douglas simétrica nas propriedades (Juchem Neto, 2023):

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2} U = \sqrt{x_1 x_2} \\ &s.a.\ p_1q_1 + p_2q_2 = I \\ &\qquad x_1 = aq_1 + (1-a)q_2 \\ &\qquad x_2 = (1-a)q_1 + aq_2 \end{aligned} \tag{3}$$

sendo $p_1 > 0, p_2 > 0$ e $I > 0$ os preços dos bens $1, 2$ e a renda do consumidor, respectivamente. A resolução deste problema, pelo método dos multiplicadores de Lagrange (Chiang e Wainwright, 2005), pode ser encontrada em Juchem Neto (2023, p. 13-14), e nos leva às funções de demanda direta pelos produtos 1 e 2 (quantidades como função dos preços; e dos parâmetros a e I):

$$q_1(p_1, p_2; a) = \frac{I}{2}\left[\frac{a}{ap_1 - (1-a)p_2} + \frac{1-a}{(1-a)p_1 - ap_2}\right], \tag{4}$$

$$q_2(p_1, p_2; a) = \frac{I}{2}\left[\frac{1-a}{ap_1 - (1-a)p_2} + \frac{a}{(1-a)p_1 - ap_2}\right], \tag{5}$$

e às funções de demanda inversa associadas (preços como função das quantidades):

$$p_1(q_1, q_2; a) = \frac{I}{2}\left[\frac{a}{aq_1 + (1-a)q_2} + \frac{1-a}{(1-a)q_1 + aq_2}\right], \tag{6}$$

$$p_2(q_1, q_2; a) = \frac{I}{2}\left[\frac{1-a}{aq_1 + (1-a)q_2} + \frac{a}{(1-a)q_1 + aq_2}\right]. \tag{7}$$

Substituindo as funções de demanda (4)-(5) em (1)-(2), podemos facilmente encontrar as demandas pelas propriedades 1 e 2: x_1 e x_2.

Com estas informações, podemos partir para a análise do duopólio de Cournot, considerando que a firma 1 produz apenas o produto 1 e que a firma 2 produz apenas o produto 2. Para tanto, consideramos as seguintes funções custos para as duas firmas:

$$C_1(q_1, q_2, a) = c_1 q_1 + b(2a-1)^{2\mu}, \mu = 1, 2, b \geq 0, \tag{8}$$
$$C_2(q_1, q_2, a) = c_2 q_2 + b(2a-1)^{2\mu}, \mu = 1, 2, b \geq 0, \tag{9}$$

sendo $c_1 \geq 0$ e $c_2 \geq 0$ os custos marginais de produção, ambos constantes. A novidade proposta no presente artigo é o custo de diferenciação dos produtos, capturado pelo segundo termo presente nas equações (8)-(9):

$$\text{Custo de Diferenciação } = b(2a-1)^{2\mu}, \mu = 1, 2, b \geq 0. \tag{10}$$

O principal critério para a escolha desta forma funcional para o custo de diferenciação (10) é que temos de ter uma função custo convexa em relação ao grau de diferenciação dos produtos, $0 \leq a \leq 1$, que se trata do mesmo parâmetro de diferenciação definido em (1)-(2), a fim de garantir a concavidade das funções lucro dos duopolistas em relação a a e assim a existência de pontos de lucro máximo. Além disso, o custo de diferenciação deve ser nulo para produtos homogêneos $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ e máximo para produtos completamente diferenciados $(a = 0$ e $a = 1)$. As funções mais simples que capturam essas propriedades são funções potência pares compostas com a função afim do tipo $(2a - 1)$, conforme proposto em (10). Observe que esta formulação para o custo de diferenciação é um termo de custo fixo de produção, pois independe das quantidades produzidas do produto.

Como a maior diferença qualitativa entre as soluções do modelo se dá entre $\mu = 1$ e valores pares de μ em (10), neste trabalho iremos considerar dois valores representativos para este parâmetro, a saber $\mu = 1, 2$, os quais são suficientes para ilustrar as possibilidades de soluções geradas pelo modelo. Além disso, o parâmetro $b \geq 0$ dá o custo máximo de diferenciação de produtos, o qual ocorre quando $a = 0$ ou $a = 1$, caso no qual os produtos são completamente diferenciados, sendo que seu valor dependerá da indústria e do tipo de produto sendo produzido. Se $a = \frac{1}{2}$, então os dois produtos são idênticos e o custo de diferenciação é nulo. Na medida em que o valor de a se afasta de ½, o custo de diferenciação aumenta, de forma mais devagar, quanto maior for o μ considerado. O valor de μ também dependerá do tipo de indústria e produto sob análise, sendo que produtos cuja diferenciação incremental implique em maiores complexidades de projeto e execução tendem a ter valores menores de μ, implicando que tais diferenciações incrementais causam aumentos cada vez mais rápidos nos custos incorridos em tal processo de diferenciação.

É importante notar, ainda, que a presente modelagem matemática pressupõe funções custos de diferenciação iguais para as duas firmas para quaisquer valores de a, de tal modo que será a razão entre os custos marginais de produção (c_1 e c_2) que determinará qual firma se beneficiará mais das transações de mercado. Apesar deste pressuposto de simetria nos custos de diferenciação não ser muito realista, ainda assim fazemos uso de tal formulação a fim de garantir maior simplicidade analítica ao modelo, já que estamos mais interessados, neste momento, em determinar o impacto da presença de custos de diferenciação no equilíbrio de mercado, abstraindo as consequências de sua natureza específica.

No Gráfico 1 apresentamos uma representação gráfica desta parcela do custo – utilizamos o software MATLAB® para elaborar todos os gráficos apresentados neste trabalho. Por fim, note que se considerarmos o parâmetro $b = 0$, recuperamos a função custo considerada em Juchem Neto (2023).

Dada as funções custo (8)-(9), as funções lucro – receita total menos custo total – das firmas 1 e 2 são dadas por:

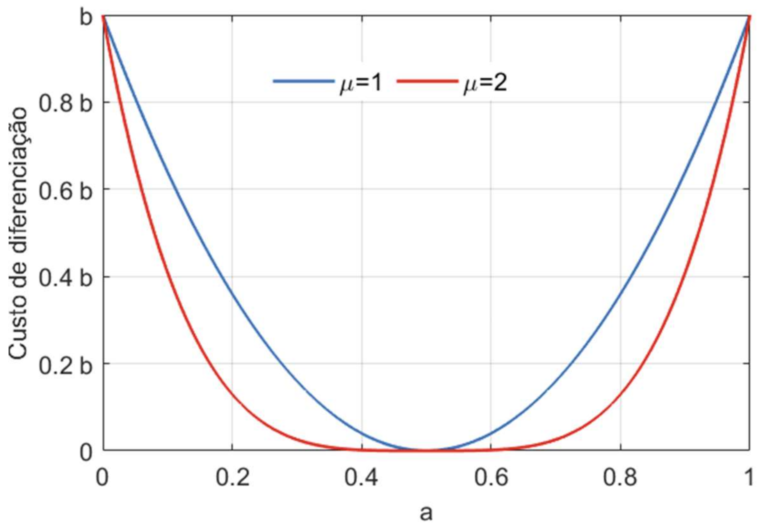
$$\pi_1(q_1, q_2; a) = p_1(q_1, q_2; a)q_1 - [c_1q_1 + b(2a-1)^{2\mu}], \tag{11}$$

$$\pi_2(q_1, q_2; a) = p_2(q_1, q_2; a)q_2 - [c_2q_2 + b(2a-1)^{2\mu}], \tag{12}$$

sendo $p_1(q_1, q_2; a)$ e $p_2(q_1, q_2; a)$ as funções de demanda inversa dadas por (6) (7).

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

Gráfico 1 – Custo de diferenciação de produtos, $b(2a-1)^{2\mu},\ \mu=1,2,\ b\geq 0$



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Agora procedemos com a resolução do duopólio de Cournot, considerando que cada firma maximiza seu lucro, determinando a quantidade a ser produzida de seu produto e tomando a decisão de produção de seu concorrente como dada (Nicholson e Snyder, 2012). Inicialmente consideramos o parâmetro de diferenciação de produtos a como exógeno. Neste caso, a aplicação das condições de primeira ordem (CPO) em relação às quantidades, conforme Chiang e Wainwright (2005), nos dá:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}=0 \quad e \quad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}=0, \tag{13}$$

nos dá o seguinte sistema de equação não lineares, já obtido em Juchem Neto (2023, p.13):

$$a(1-a)q_2\left[\frac{1}{(aq_1+(1-a)q_2)^2}+\frac{1}{\left((1-a)q_1+aq_2\right)^2}\right]=\frac{2c_1}{I}, \tag{14}$$

$$a(1-a)q_1\left[\frac{1}{(aq_1+(1-a)q_2)^2}+\frac{1}{\left((1-a)q_1+aq_2\right)^2}\right]=\frac{2c_2}{I}. \tag{15}$$

A solução simultânea das equações (14)-(15) e o uso das funções de demanda inversas (6)- (7) também resultam nos mesmos valores de equilíbrio para as quantidades:

$$q_1^* = \frac{I}{2}a(1-a)c_2\left[\frac{1}{\left((1-a)c_1+ac_2\right)^2} + \frac{1}{(ac_1+(1-a)c_2)^2}\right], \tag{16}$$

$$q_2^* = \frac{I}{2}a(1-a)c_1\left[\frac{1}{\left((1-a)c_1+ac_2\right)^2} + \frac{1}{(ac_1+(1-a)c_2)^2}\right], \tag{17}$$

e preços dos produtos já obtidos em Juchem Neto (2023, p. 14):

$$p_1^* = \frac{1}{a(1-a)}\frac{\left[\frac{a}{(1-a)c_1+ac_2}+\frac{1-a}{ac_1+(1-a)c_2}\right]}{\left[\frac{1}{\left((1-a)c_1+ac_2\right)^2}+\frac{1}{(ac_1+(1-a)c_2)^2}\right]}, \tag{18}$$

$$p_2^* = \frac{1}{a(1-a)}\frac{\left[\frac{1-a}{(1-a)c_1+ac_2}+\frac{a}{ac_1+(1-a)c_2}\right]}{\left[\frac{1}{\left((1-a)c_1+ac_2\right)^2}+\frac{1}{(ac_1+(1-a)c_2)^2}\right]}. \tag{19}$$

A diferença do presente trabalho surge nos lucros de equilíbrio, os quais podem ser obtidos substituindo os preços e quantidades de equilíbrio (16)-(19) nas expressões (11)-(12). Aqui, estes lucros de equilíbrio incluirão o custo de diferenciação dos produtos, com seus dois parâmetros b e μ, conforme pode ser verificado a seguir:

$$\pi_1^* = \frac{Ic_2^2}{2}\left[\frac{a^2}{\left((1-a)c_1+ac_2\right)^2} + \frac{(1-a)^2}{(ac_1+(1-a)c_2)^2}\right] - b(2a-1)^{2\mu}, \tag{20}$$

$$\pi_2^* = \frac{Ic_1^2}{2}\left[\frac{(1-a)^2}{\left((1-a)c_1+ac_2\right)^2} + \frac{a^2}{(ac_1+(1-a)c_2)^2}\right] - b(2a-1)^{2\mu}. \tag{21}$$

Para a situação na qual os custos marginais das duas firmas são iguais, $c_1 = c_2 = c > 0$, isto significará, em termos econômicos, que as duas firmas são igualmente eficientes, tal que o equilíbrio de Cournot será simétrico, i.e. os valores de equilíbrio (16)-(21) serão iguais para ambas as firmas: $p_1^* = p_2^* = p^*$, $q_1^* = q_2^* = q^*$ e $\pi_1^* = \pi_2^* = \pi^*$, se reduzindo a:

$$p^* = \frac{c}{2a(1-a)}, \tag{22}$$

$$q^* = \frac{Ia(1-a)}{c}, \tag{23}$$

$$\pi^* = \frac{I}{2}[1 - 2a(1-a)] - b(2a-1)^{2\mu}. \tag{24}$$

Novamente, o impacto do custo de diferenciação aparece apenas na expressão para o lucro simétrico (24). Adicionalmente, se $b = 0$, então temos os mesmos valores de equilíbrio do caso particular, sem custo de diferenciação, considerado em Juchem Neto (2023).

Análise dos dados e resultados

Iniciaremos a análise dos resultados considerando o caso em que os custos marginais são iguais, $c_1 = c_2 = c > 0$, isto é, que as duas firmas são igualmente eficientes. É fácil ver, pelas equações (22) e (23), que o preço de equilíbrio de Cournot será mínimo e a quantidade de equilíbrio será máxima, quando os produtos forem idênticos, $a = \frac{1}{2}$. Tal resultado faz sentido econômico, uma vez que a homogeneidade dos produtos acirra a competição entre as firmas, aumentando quantidades e reduzindo preços de equilíbrio, diminuindo assim seu poder de mercado. Na primeira coluna do Gráfico 2 apresentamos graficamente este resultado, para o caso particular em que $I = c = 1$. Como os preços e quantidades de equilíbrio não dependem do custo de diferenciação, os resultados apresentados no Gráfico 2 são os mesmos apresentados por Juchem Neto (2023).

Quanto ao lucro máximo de equilíbrio (24), como função do grau de diferenciação e dos parâmetros associados ao custo de diferenciação dos produtos, temos os seguintes resultados apresentados como duas proposições e respectivos corolários abaixo. Nestas proposições é identificado um valor crítico para o custo máximo de diferenciação b, o qual é obtido e definido como b_{crit} ao longo de suas demonstrações. Este valor crítico de b permitirá

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

caracterizar o grau de diferenciação de produtos que garantirá lucro máximo aos duopolistas, conforme detalhado nas proposições a seguir.

Proposição 1: Seja $\mu = 1$ e $b_{crit} = \frac{I}{4}$, sendo I a renda do consumidor.

(i) Se $0 \leq b < b_{crit}$, então o lucro máximo dos duopolistas, $\pi^* = \frac{I}{2} - b$, ocorre quando $a^* = 0$ ou $a^* = 1$, isto é, quando os produtos são totalmente diferenciados, ou independentes.

(ii) Se $b = b_{crit}$, então o lucro dos duopolistas é constante, $\pi^* = \frac{I}{4}$ para todo $a \in [0,1]$, não dependendo do grau de diferenciação dos produtos.

(iii) Se $b > b_{crit}$, então o lucro máximo dos duopolistas, $\pi^* = \frac{I}{4}$, ocorre quando $a^* = \frac{1}{2}$, isto é, quando os produtos são idênticos.

Demonstração da Proposição 1

Considere inicialmente o lucro ótimo (no sentido de já incorporar as quantidades que o maximizam), dado pela equação (24):

$$\pi^* = \frac{I}{2}[1 - 2a(1-a)] - b(2a-1)^{2\mu}. \tag{25}$$

Sendo assim, um certo grau de diferenciação de produtos $a \in (0,1)$ que satisfaz a Condição de Primeira Ordem, CPO (Chiang e Wainwright, 2005):

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial a} = (2a-1)\left[I - 4\mu b(2a-1)^{2(\mu-1)}\right] = 0, \tag{26}$$

será maximizador do lucro se a seguinte condição de segunda ordem (CSO) for satisfeita:

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial a^2} = 2I - 8\mu(2\mu-1)b(2a-1)^{2(\mu-1)} < 0, \tag{27}$$

e minimizador do lucro se:

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

$$\frac{\partial^2\pi^*}{\partial a^2} = 2I - 8\mu(2\mu-1)b(2a-1)^{2(\mu-1)} > 0. \tag{28}$$

No caso da presente proposição $\mu = 1$ e a CPO dada pela equação (26) fica:

$$\frac{\partial\pi}{\partial a} = (2a-1)(I-4b) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e/ou } b = \frac{I}{4}. \tag{29}$$

Se $b = b_{crit}$, onde definimos o valor crítico para o parâmetro b como $b_{crit} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I}{4}$, então o lucro dado por (25) com $\mu = 1$ é constante, $\pi \equiv \frac{I}{4}$, para todo $a \in [0,1]$, o que nos dá o item (ii) da proposição. Substituindo o ponto crítico $a = \frac{1}{2}$ nas CSO (27)-(28), obtemos:

$$\frac{\partial^2\pi^*}{\partial a^2} = 2(I-4b) \gtrless 0 \Leftrightarrow b \lessgtr b_{crit}, \tag{30}$$

e assim, $a^* = \frac{1}{2}$ será ponto de lucro máximo se $b > b_{crit}$, caso em que temos o item (iii) da proposição, com lucro máximo $\pi^* = \frac{I}{4}$ sendo dado por (25). Já se $0 \leq b < b_{crit}$, teremos que $a = \frac{1}{2}$ será ponto de lucro mínimo, de forma que o lucro máximo ocorrerá nos extremos do intervalo $a^* = 0$ e $a^* = 1$, sendo dado também por (25), $\pi^* = \frac{I}{2} - b$, e assim obtemos o item (i) da proposição, finalizando a demonstração.

A Proposição 1 nos informa que quando o custo de diferenciação cresce mais rapidamente, $\mu = 1$, existe um valor crítico $b_{crit} = \frac{I}{4}$ tal que se o custo máximo de diferenciação for menor do que este valor e maior ou igual a zero, o lucro dos duopolistas será máximo quando os produtos forem totalmente diferenciados, i.e. neste caso vale a pena arcar com os custos de diferenciação, o que faz sentido, pois o custo de diferenciação é suficientemente pequeno para ser compensado pelos ganhos em preço; já, se o custo de diferenciação for maior do que este valor crítico, o lucro será máximo para produtos idênticos, não valendo a pena nenhum grau intermediário de diferenciação; e finalmente ambos os

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

comportamentos extremos são separados quando $b = b_{crit}$, caso em que o lucro das firmas independe do grau de diferenciação dos produtos.

Na primeira coluna do Gráfico 3 apresentamos graficamente este resultado, para o caso particular em que $I = c = 1$ e para alguns valores representativos do custo máximo de diferenciação, b. Neste caso particular temos $b_{crit} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Já no painel da esquerda do Gráfico 5, apresentamos um mapa de cores do lucro dos duopolistas para $0 \leq b \leq 1$ variando continuamente. As linhas pretas verticais sólidas indicam o lucro máximo, ocorrendo com diferenciação máxima para $b < \frac{1}{4}$ e com produtos idênticos para $b > \frac{1}{4}$. Já as linhas pretas tracejadas indicam lucro mínimo. É importante ressaltar que, com $\mu = 1$, a diferenciação parcial ainda não aparece como resultado do modelo, dado que o crescimento dos custos de diferenciação é muito rápido, o que desencoraja os produtores a adotar *design* de produtos distintos.

Corolário 1: Seja $\mu = 1$ e $b_{crit} = \frac{I}{4}$. Se $0 \leq b < b_{crit}$, então o lucro máximo π^* decresce com o aumento do custo máximo de diferenciação, b, permanecendo constante se $b \geq b_{crit}$.

Demonstração do Corolário 1

A fim de obter o resultado, basta notar, pela Proposição 1, que $\frac{\partial \pi}{\partial b} = -1 < 0$ se $0 \leq b < b_{crit}$ e que $\frac{\partial \pi}{\partial b} = 0$ se $b \geq b_{crit}$.

Este resultado é economicamente esperado, uma vez que, com um custo de diferenciação baixo, mas não nulo, valerá a pena diferenciar os produtos, mas de tal maneira que quanto maior o custo, menos lucrativa será a diferenciação, até o ponto que diferenciar será irrelevante e, finalmente, onde não haverá diferenciação alguma.

Proposição 2: Seja μ um número natural tal que $\mu \geq 2$ e $b_{crit} = \frac{I}{4\mu}$, sendo I a renda do consumidor.

(i) Se $0 \leq b \leq b_{crit}$, então o lucro máximo dos duopolistas, $\pi^* = \frac{I}{2} - b$, ocorre quando $a^* = 0$ ou $a^* = 1$, isto é, quando os produtos são totalmente diferenciados, ou independentes.

(ii) Se $b > b_{crit}$, então o lucro máximo dos duopolistas:

$$\pi^* = I\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{I}{4^{\mu}\mu b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\right], \tag{31}$$

ocorre quando os produtos são parcialmente diferenciados, isto é, quando:

$$a_{\pm}^* = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{I}{4\mu b}\right)^{\frac{1}{2(\mu-1)}}, \tag{32}$$

sendo $0 < a_{-}^* < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} < a_{+}^* < 1$.

Demonstração da Proposição 2

No caso desta proposição, μ é um número natural maior ou igual a dois e a condição de primeira ordem (26) apresenta três pontos críticos:

$$a = \frac{1}{2} \text{ e } a_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{I}{4\mu b}\right)^{\frac{1}{2(\mu-1)}}. \tag{33}$$

Agora note que o ponto crítico $a = \frac{1}{2}$ aplicado nas CSO (27)-(28), resulta em $\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial a^2} = 2I > 0$ e assim o ponto $a = \frac{1}{2}$ sempre será um minimizados do lucro, independente dos outros

Rev. Bras. de Iniciação Científica (RBIC), IFSP Itapetininga, v.12, e025018, p. 1-26, 2025.

parâmetros do modelo. Além disso, se $\left(\frac{I}{4\mu b}\right)^{\frac{1}{2(\mu-1)}} \geq 1 \Leftrightarrow 0 < b < b_{crit}$, onde definimos o valor crítico $b_{crit} = \frac{I}{4\mu}$ quando vale a igualdade, então os pontos críticos $a_{\pm} \notin (0,1)$ e o lucro máximo, $\pi^* = \frac{I}{2} - b$, ocorrerá em $a^* = 0$ e $a^* = 1$. Se $b = 0$, então $\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial a^2} = 2I > 0$, o que também implica em lucro máximo com $a^* = 0$ e $a^* = 1$. Logo, obtemos o item (i) da proposição. Por outro lado, se $\left(\frac{I}{4\mu b}\right)^{\frac{1}{2(\mu-1)}} < 1 \Leftrightarrow b > b_{crit}$, então $a_{\pm} \in (0,1)$ e além disso:

$$\left.\frac{\partial^2 \pi}{\partial a^2}\right|_{a=a_{\pm}} = 4I(1-\mu) < 0, \text{para } \mu \geq 2, \tag{34}$$

ou seja, $a_{\pm}^*$ são pontos maximizadores do lucro dos duopolistas, tal que $0 < a_{-}^* < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} < a_{+}^* < 1$. Por fim, substituindo $a_{\pm}^*$ na função lucro (25), temos que o lucro máximo será dado por:

$$\pi^* = I\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{I}{4^{\mu}\mu b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\right], \tag{35}$$

o que nos dá o item (ii) da proposição, finalizando sua demonstração.

Ou seja, num cenário onde o custo de diferenciação dos produtos não cresce tão rapidamente, $\mu \geq 2$, quando comparado com $\mu = 1$, observamos que nunca ocorrerá de o lucro das firmas ser máximo com produtos idênticos: este será máximo com diferenciação total (se o custo máximo de diferenciação for pequeno) ou com diferenciação parcial (se o custo máximo de diferenciação for grande). Este resultado faz sentido econômico, uma vez que um custo máximo b suficientemente pequeno incentivará os produtores a diferenciar totalmente seus produtos para obterem, simultaneamente, privilégios monopolísticos sobre a demanda de uma das duas propriedades. Quando o custo máximo, porém, for suficientemente grande, mas não proibitivo, a diferenciação total deixa de fazer sentido, porém os privilégios de diferenciar permanecem, tal que a confecção de produtos parecidos, mas não iguais, passa a ser prática.

Observação: para o caso particular em que $\mu = 2$, o lucro máximo será dado por:

$$\pi^* = \frac{I}{4} + \frac{I^2}{64b}. \tag{36}$$

Da Proposição 2 segue o seguinte corolário.

Corolário 2: Se μ for um número natural tal que $\mu \geq 2$ e $b > 0$, então:

$$a_-^* \nearrow \frac{1}{2} \text{ e } a_+^* \searrow \frac{1}{2} \text{quando } b \nearrow \infty. \tag{37}$$

Além disso:

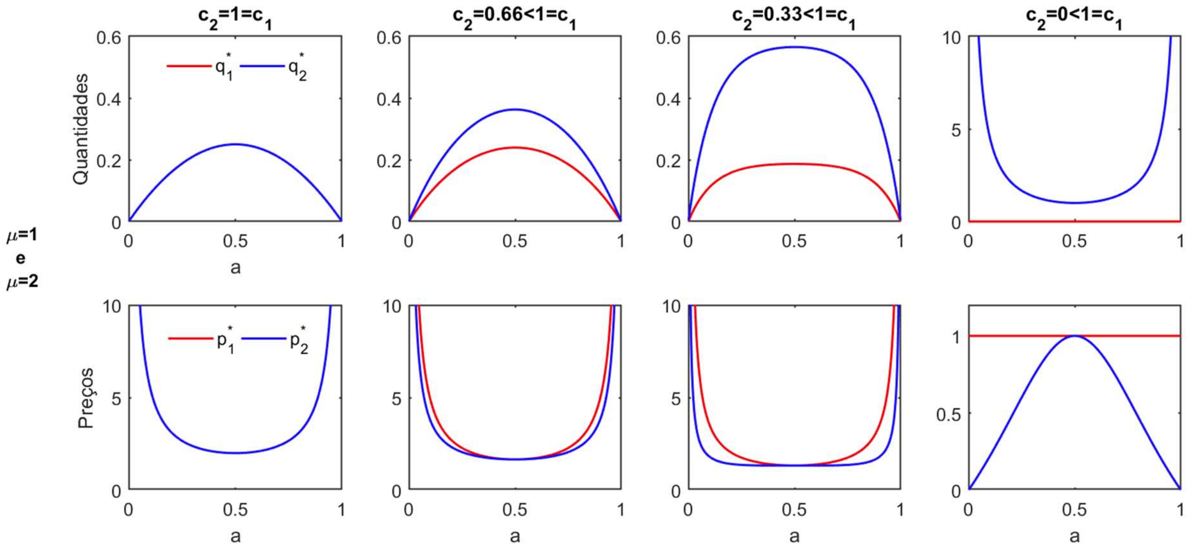
$$\pi^* \searrow \frac{I}{4} \text{quando } b \nearrow \infty. \tag{38}$$

Demonstração do Corolário 2

De (33) temos que $\lim_{b\to\infty} a_\pm = \frac{1}{2}$, pois o expoente $\frac{1}{2(\mu-1)}$ é positivo para $\mu \geq 2$. Além disso, note que $\frac{\partial a_\pm}{\partial b} = \mp \frac{1}{4(\mu-1)} \left(\frac{I}{4\mu b}\right)^{\frac{1}{2(\mu-1)}-1}$, o que implica na monotonicidade desta convergência, i.e. $a_-^* \nearrow \frac{1}{2}$ e $a_+^* \searrow \frac{1}{2}$ quando $b \nearrow \infty$. Isso nos dá o resultado (37) do corolário. O resultado (38) segue do fato de que, por (25) e (35), temos $\lim_{b\to\infty} \pi = \frac{I}{4}$ e $\frac{\partial \pi}{\partial b} = -4^{-\frac{\mu}{\mu-1}} \left(\frac{I}{\mu b}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} < 0$.

Em outras palavras, quanto maior for o custo de diferenciação, o lucro máximo decrescente com b ocorrerá para produtos cada vez mais semelhantes, sendo que no limite de um custo de diferenciação máximo tendendo ao infinito, este ocorrerá apenas quando os produtos forem idênticos. Pode-se chegar a tal conclusão através de um raciocínio econômico, pois quanto mais caro for elaborar produtos distintos, menos os produtores desejarão diferenciar, apesar dos ganhos quase-monopolísticos.

Gráfico 2 – Quantidades e preços de equilíbrio de Cournot considerando custos marginais iguais e distintos, $I = 1$, $\mu = 1$ e $\mu = 2$



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

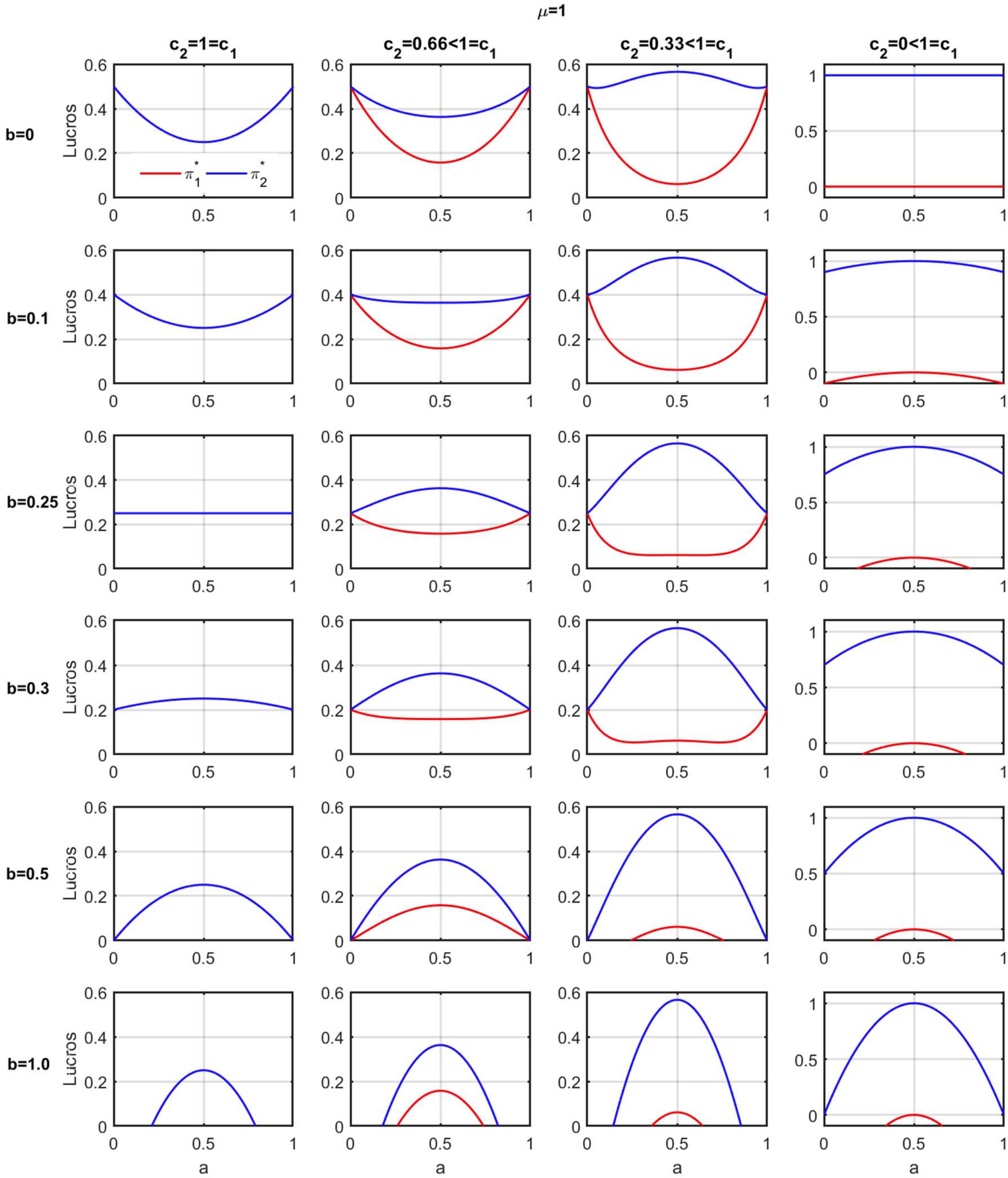
Na primeira coluna do Gráfico 4 ilustramos graficamente estes resultados para $\mu = 2$, considerando o caso particular em que $I = c = 1$, e alguns valores representativos do custo máximo de diferenciação, b. Aqui temos $b_{crit} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Como podemos ver, para $b \leq 0{,}125$, o lucro máximo ocorre para produtos totalmente diferenciados, $a^* = 0$ e $a^* = 1$, enquanto que para $b > 0{,}125$ os lucros máximos ocorrem para produtos parcialmente diferenciados, $0 < a_-^* < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} < a_+^* < 1$, sendo que quanto maior for o custo de diferenciação máximo b, mais próximos a_-^* e a_+^* ficam de $a = \frac{1}{2}$. No painel da direita do Gráfico 5, apresentamos um mapa de cores do lucro máximo dos duopolistas para $0 \leq b \leq 1$ variando continuamente. As linhas pretas sólidas indicam o lucro máximo, ocorrendo com diferenciação total para $b \leq 0{,}125$ e com produtos parcialmente diferenciados para $b > 0{,}125$, enquanto a linha preta tracejada indica pontos de lucro mínimo, local ou global.

Neste cenário no qual ambas as firmas são igualmente eficientes sempre acontece dos seus lucros máximos ocorrerem para o mesmo nível de diferenciação de produtos, a, já que

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

suas funções lucro são idênticas. Sendo assim, é sempre possível duas firmas auferirem lucro máximo para o mesmo grau ótimo de diferenciação dos produtos.

Gráfico 3 – Lucros no equilíbrio de Cournot considerando custos marginais iguais e distintos, $I = 1$, $\mu = 1$, $b = 0$, $b = 0{,}1$, $b = 0{,}25$, $b = 0{,}3$, $b = 0{,}5$ e $b = 1.0$



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Agora consideraremos o caso no qual as firmas possuem custos marginais distintos, um cenário mais provável de se encontrar na vida real, como quando novas concorrentes adentram num mercado, sem a mesma experiência e *know-how* da firma original ou que simplesmente não possui o mesmo equipamento ou técnica produtiva. Neste cenário, o problema de maximização dos lucros dos duopolistas (20)-(21) em relação ao parâmetro de diferenciação de produtos, a, não tem solução analítica como no caso com custos marginais iguais analisado anteriormente. Sendo assim, iremos analisar numericamente alguns casos representativos, considerando o custo marginal da firma 1 fixo, $c_1 = 1$, e três cenários nos quais a firma 2 é gradualmente mais eficiente que a firma 1, com seu custo marginal sendo $c_2 = 0.66$, $c_2 = 0.33$ e $c_2 = 0$. Como acima, também consideraremos $I = 1$, $\mu = 1$, $\mu = 2$, $b = 0$, $b = 0{,}1$, $b = 0{,}25$, $b = 0{,}3$, $b = 0{,}5$ e $b = 1.0$.

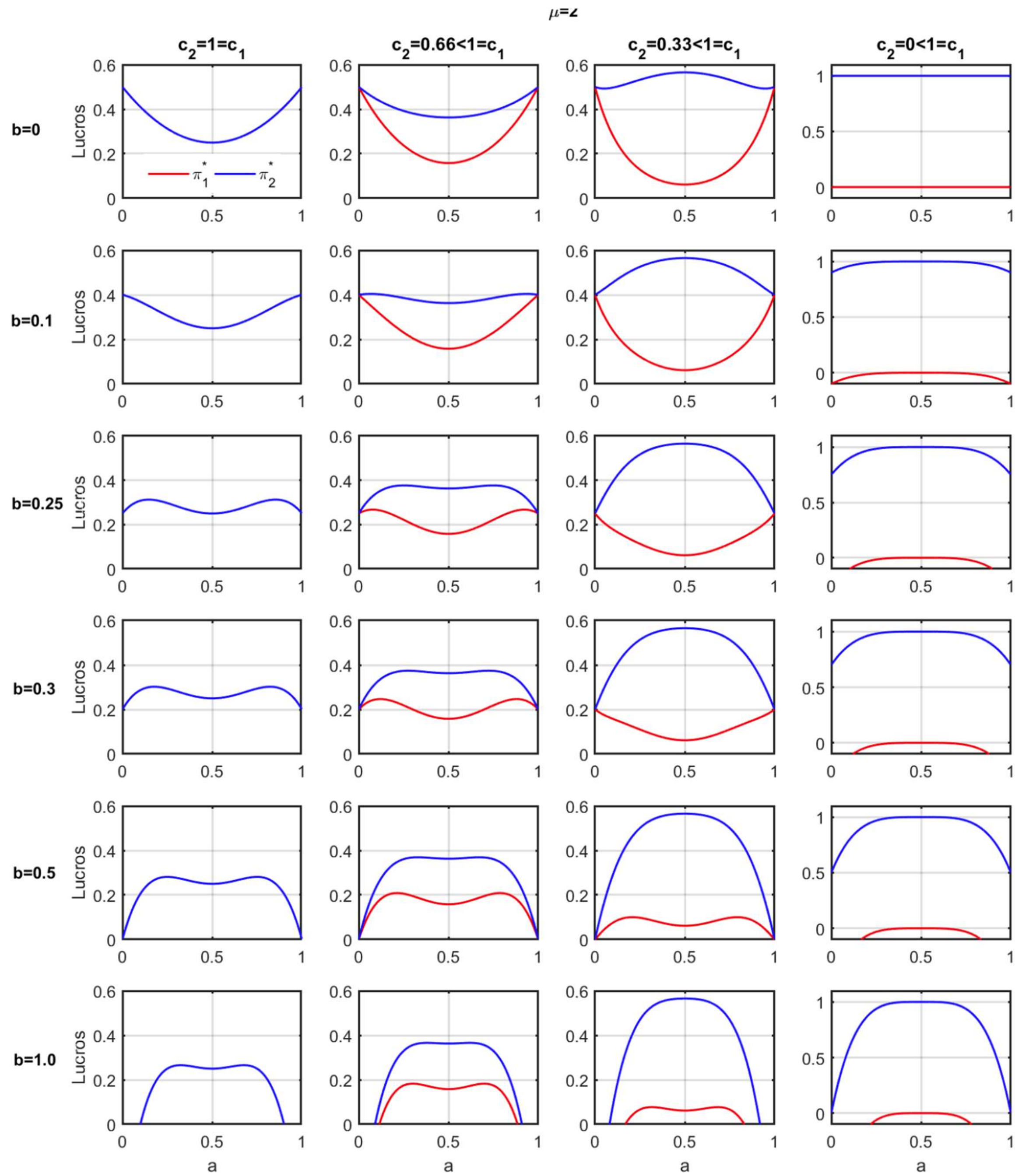
Analogamente ao caso de custos marginais iguais, o custo de diferenciação (representados pelos parâmetros μ e b) não afeta as quantidades e preços no equilíbrio de Cournot (16)-(17) e (18)-(19), respectivamente. Desta forma, apresentamos o impacto de custos marginais distintos nestes equilíbrios no Gráfico 2 (segunda, terceira e quarta colunas). Como podemos ver, quanto menor é o custo marginal da firma 2, maior é a quantidade produzida por ela e menor é o seu preço (exceto quando os produtos são iguais, quando vale a igualdade), quando comparados com a firma 1. No limite em que $c_2 = 0$, caso de eficiência máxima da firma 2, a firma 1 deixa de produzir, com a firma 2 suprindo todo o mercado.

No Gráfico 3 apresentamos o lucro das duas firmas quando $\mu = 1$. Se a firma 2 não é muito mais eficiente que a firma 1, $c_2 = 0.66$, e se o custo de diferenciação é pequeno, $b = 0$ e $b = 0.1$, o ponto de lucro máximo para ambas as firmas envolve diferenciação completa, sendo que as duas auferem o mesmo lucro. Se o custo de diferenciação é intermediário, $b = 0.25$ e $b = 0.3$, o ponto de lucro máximo da firma 2 muda para $a^* = \frac{1}{2}$ e o da firma 1 continua nos pontos de diferenciação completa; neste caso, o lucro máximo da firma 2 é maior que o da firma 1. Observe que neste cenário não há um grau de diferenciação de produtos que maximize o lucro das duas firmas em relação ao parâmetro a simultaneamente; como este parâmetro deve ser decidido conjuntamente, as firmas terão de chegar a um acordo de como diferenciar os produtos, se contentando com níveis não ótimos de lucros. Este tipo de indeterminação aparece quando as firmas não são igualmente eficientes. Por fim, para custos de diferenciação altos,

Revista brasileira de iniciação científica
ISSN: 2359-232X

$b = 0.5$ e $b = 1.0$, ambas as firmas maximizam lucro com produtos homogêneos, com a firma 2 auferindo lucros maiores por ser mais eficiente.

Gráfico 4 – Lucros no equilíbrio de Cournot considerando custos marginais iguais e distintos, $I = 1$, $\mu = 2$, $b = 0$, $b = 0{,}1$, $b = 0{,}25$, $b = 0{,}3$, $b = 0{,}5$ e $b = 1.0$



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

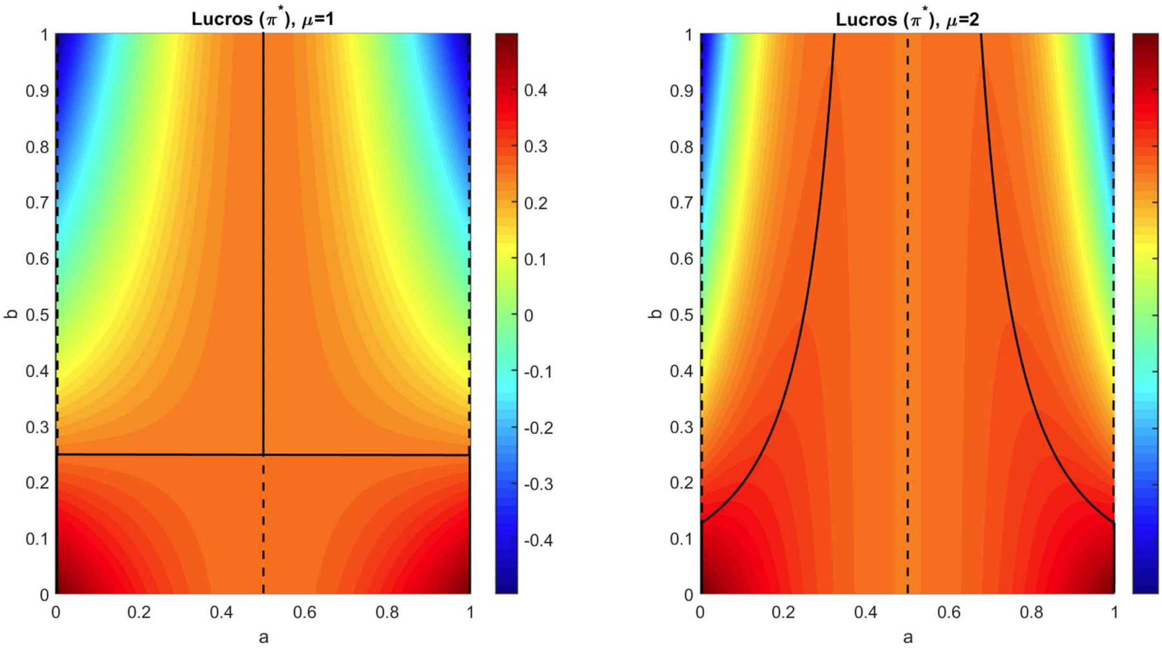
Num cenário no qual a firma 2 é significativamente mais eficiente que a firma 1, $c_2 = 0.33$, a firma 2 também aufere lucros maiores que a firma 1, neste caso sempre produzindo produtos idênticos. Já a firma 1 diferencia totalmente os produtos para custos de diferenciação baixos, $b = 0$ até $b = 0.3$ (caso em que seria impossível maximizar o lucro das duas firmas simultaneamente) e produz produtos iguais para $b = 0.5$ e $b = 1.0$. Por fim, quando $c_2 = 0$, apenas a firma 2 está no mercado, produzindo produto com $a^* = \frac{1}{2}$ se $b > 0$, e sendo indiferente às características do produtos se $b = 0$.

No Gráfico 4 apresentamos cenários iguais ao do Gráfico 3, porém considerando que os custos de diferenciação não crescem tão rapidamente, $\mu = 2$, como no caso acima. Quando $c_2 = 0.66$, a principal diferença qualitativa dos resultados é que para custos de diferenciação mais altos, onde com $\mu = 1$ era mais vantajoso diferenciar completamente ou nada, agora se torna mais vantajoso, para uma ou ambas as firmas, diferenciar parcialmente, porém com pontos de lucro máximo não coincidentes para os duopolistas. Se $c_2 = 0.33$, então como antes a firma 2 só produziria produtos homogêneos, enquanto a firma 1 iria diferenciar os produtos parcialmente para custos de diferenciação maiores e totalmente para custos de diferenciação menores. Novamente, não há como maximizar os dois lucros simultaneamente, com um mesmo grau de diferenciação de produtos. Por fim, não há grandes diferenças qualitativas nos resultados para $c_2 = 0$.

Em suma, no cenário no qual ambas as firmas não são igualmente eficientes, nem sempre é possível elas acordarem em como diferenciar os produtos a fim de simultaneamente auferirem lucro máximo, sendo então necessária a adoção de algum critério não ótimo a fim de determinar o grau de diferenciação dos produtos a ser adotado.

Note que os resultados apresentados na primeira linha de gráficos tanto no Gráfico 3 quanto no Gráfico 4 não apresentam distinção dos resultados apresentados em Juchem Neto (2023), pois nestes cenários o custo de diferenciação é nulo, reproduzindo assim os resultados do modelo anteriormente proposto.

Gráfico 5 – Lucros no equilíbrio de Cournot considerando custos marginais iguais, $I = 1$, $c = 1, \mu = 1, \mu = 2$ e $0 \leq b \leq 1$



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Os resultados aqui obtidos se diferenciam dos apresentados em Juchem Neto (2023) e Puu (2017, 2018), principalmente porque estes trabalhos não consideram custos de diferenciação de produtos na modelagem e não geram equilíbrios de Cournot com diferenciação parcial de produtos, o que ocorre no presente trabalho. Adicionalmente, Puu (2017, 2018) dá ênfase ao desenvolvimento de oligopólios dinâmicos e aqui adotamos uma abordagem de otimização estática, que pode servir de base para futuros modelos dinâmicos.

Além disso, Voelkening (2024) considera diferenciação de produtos *à la* Lancaster (sem custos de diferenciação) em um duopólio de Cournot, porém assumindo uma função de utilidade do consumidor quadrática – o que dá origem a funções de demanda lineares – e se utilizando de um jogo de duas etapas como ferramental de análise. Seus resultados contrastam com os obtidos aqui, no sentido de que mostra que o equilíbrio de Cournot sempre envolve a decisão por produzir produtos homogêneos. Tal diferença de resultados pode advir tanto da função de utilidade utilizada, diferente da Cobb-Douglas aqui considerada, quanto do ferramental analítico utilizado, o que pode constituir interessante tópico de pesquisa futura.

Considerações finais

A principal conclusão a que chegamos com este trabalho é que a introdução de custos de diferenciação de produtos em um duopólio de Cournot considerando as demandas de Lancaster foi suficiente para gerar resultados de equilíbrios com diferenciação parcial de produtos, onde os duopolistas maximizam seus lucros, desde que tais custos cresçam rápido o suficiente em relação ao grau de diferenciação dos produtos e que estes, entretanto, não sejam proibitivos.

No caso particular em que ambas as firmas são igualmente eficientes, apresentando custos marginais de produção iguais, vimos que sempre é possível encontrar um grau de diferenciação de produtos capaz de maximizar o lucro das duas firmas simultaneamente. Já no caso em que as firmas apresentam custos marginais distintos, tal alinhamento de interesses nem sempre é possível, sendo necessário algum outro tipo de arranjo não ótimo entre as duas firmas a fim de decidir o quanto diferenciar os produtos a serem produzidos.

Além disso, observamos que quando o custo de diferenciação cresce muito rapidamente, só ocorre de o lucro das firmas ser máximo para diferenciação total ou nenhuma diferenciação dos produtos. Já se o custo de diferenciação crescer mais devagar, surge o aparecimento de resultados de lucro máximo com diferenciação parcial dos produtos.

Como perspectiva de pesquisa futura, podemos considerar o modelo aqui tratado com parametrização das características em duas variáveis, o que permitiria que as firmas maximizassem seus lucros com graus de diferenciação de produtos distintos. Além disso, seria interessante considerar que o custo de diferenciação também depende da quantidade produzida de produtos e, ainda, desenvolver uma formulação assimétrica para tal, de modo que o custo de diferenciar nem sempre seja igual para ambas as firmas. Finalmente, o modelo aqui proposto pode servir de base para futuros modelos de duopólios dinâmicos ou utilizando o referencial teórico da Teoria de Jogos.

Agradecimentos

Os autores agradecem à PROPESQ/UFRGS e ao CNPq pela concessão de uma bolsa de iniciação científica PIBIC/CNPq ao primeiro autor deste artigo.

Referências

CABRAL, Luís Martins Barata. **Introduction to Industrial Organization.** Cambridge: The MIT Press, 2000.

CHIANG, Alpha Chung-i; WAINWRIGHT, Kevin. **Matemática para Economistas.** 4.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

JUCHEM NETO, João Plínio. Diferenciação de produtos em um duopólio utilizando a teoria do consumidor de Lancaster. **Informe Econômico (UFPI)**, Teresina, v. 46, n. 1, p. 4-22, 2023.

JUCHEM NETO, João Plínio; ARAÚJO, Jorge Paulo de; WIEHE, Martin. Objective and subjective product differentiation in a Cournot duopoly. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 10, n. 2, p. e3010, 2024.

LANCASTER, Kelvin John. A new approach to consumer theory. **Journal of Political Economy**, Chicago, v. 74, n. 2, p. 132-157, 1966.

LANCASTER, Kelvin John. **Consumer Demand: A New Approach**. New York: Columbia University Press, 1971.

NICHOLSON, Walter; SNYDER, Christopher. **Microeconomic theory: basic principles & extensions.** 12.ed. Boston: CENGAGE Learning, 2012.

PINDYCK, Robert Stephen.; RUBINFELD, Daniel Lee. **Microeconomia.** 6.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2006.

PUU, Tünu. A new approach to modeling Bertrand duopoly. **Review of Behavioral Economics**, Dundee, v. 4, p. 51-67, 2017.

PUU, Tönu. **Disequilibrium Economics: Oligopoly, Trade, and Macrodynamics.** Cham: Springer, 2018.

SHY, Oz. **Industrial Organization: Theory and Applications.** Cambridge: The MIT Press, 1995.

VOELKENING, Daniel. **Product design in a Cournot duopoly (Working Paper No. 216).** Department of Economics and Management, Università di Pavia, Italy, 2024. Disponível em: https://economiaemanagement.dip.unipv.it/sites/dip10/files/2024-03/DEMWP0216.pdf. Acesso em: 27 dez. 2024.