REVIN
REVISTA INTERNACIONAL DE PESQUISA EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

El álgebra escolar y la modelización en la escuela secundaria a partir de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI)

School algebra and modeling in secondary school from a Study and Research Path (SRP)

Álgebra escolar e modelagem no ensino médio a partir de uma Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

Estefanía Laplace[1]
María Rita Otero[2]
Viviana Carolina Llanos[3]

Resumen: En este trabajo se presentan resultados parciales de la implementación de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) que permite desarrollar procesos de modelización algebraico-funcional en la escuela secundaria. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de los Didáctico y las investigaciones sobre el álgebra escolar desarrolladas en este marco. Se construyen indicadores a partir de las producciones de los estudiantes y se describen tres etapas en el proceso de modelización algebraico-funcional, que surgen del desarrollo del REI y de las preguntas que este propone. Los resultados muestran el papel decisivo del REI para iniciar a los estudiantes en el proceso de modelización, así como sus dificultades y obstáculos para alcanzar los niveles más complejos.
Palabras-clave: Modelización algebraico-funcional. Álgebra escolar. REI

Abstract: This work presents partial results of the implementation of a Study and Research Path (SRP) that allows development algebraic-functional modeling processes in secondary school. The Anthropological Theory of Didactics and the research on school algebra developed within this framework are adopted as a theoretical reference. Indicators are built from the students' productions and three stages in the algebraic-functional modeling process are described, which arise from the development of the SRP and the questions it proposes. The results show the decisive role of the SRP in initiating students in the modeling process, as well as its difficulties and obstacles to achieving the most complex levels.
Keywords: Algebraic-functional modeling. School algebra. SRP

[1]Profesora de Matemática. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. https://orcid.org/0000-0001-9377-7369. E-mail: elaplace@fio.unicen.edu.ar.
[2] Doctora en Enseñanza de las Ciencias. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. https://orcid.org/0000-0002-1682-9142. E-mail: rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar
[3] Doctora en Enseñanza de las Ciencias. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. https://orcid.org/0000-0003-0433-2654. E-mail: vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática

Resumo: Este trabalho apresenta resultados parciais da implementação de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) que permite o desenvolvimento de processos de modelagem algébrico-funcional no ensino médio. Adota-se como referencial teórico a Teoria Antropológica da Didática e as pesquisas sobre álgebra escolar desenvolvidas nesse âmbito. Os indicadores são construídos a partir das produções dos alunos e são descritas três etapas do processo de modelagem algébrico-funcional, que surgem a partir do desenvolvimento do PEP e das questões que ele propõe. Os resultados mostram o papel decisivo do PEP na iniciação dos alunos no processo de modelagem, bem como suas dificuldades e obstáculos para alcançar os níveis mais complexos.

Palavras-chave: Modelagem algébrico-funcional. Álgebra escolar. PEP

Submetido 26/03/2024 **Aceito 06/06/2024** **Publicado 14/06/2024**

REVIN
REVISTA INTERNACIONAL DE PESQUISA EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Introducción

En este trabajo se presentan resultados parciales del desarrollo de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) que promueve la *modelización algebraico-funcional* en la escuela secundaria tomando como punto de partida investigaciones previas desarrolladas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Ruiz-Munzón, 2010, Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2011).

En un REI se realiza enseñanza por indagación a partir del estudio de una pregunta denominada *generatriz*, capaz de engendrar una arborescencia de cuestiones derivadas de ella. En este REI la pregunta generatriz es Q_0: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?* Esta cuestión interesa a los estudiantes porque en el último año de su escolaridad administran el kiosco escolar. El estudio y la investigación giran alrededor de cómo gestionar dicho kiosco para obtener el máximo beneficio, y habilitan entre otros, el estudio de las ecuaciones lineales en dos variables y las funciones afines asociadas, con énfasis en los aspectos algebraicos y geométricos.

El álgebra escolar y su enseñanza son temas centrales en la obra de Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994), quien tempranamente propone que la enseñanza del álgebra abandone su papel deslucido como generalización de la aritmética y que sea considerada como un instrumento de modelización. Posteriormente, los trabajos de Gascón (1999) y Bolea, Bosch y Gascón (2001) retoman y profundizan estas ideas en nuevas investigaciones vinculadas a la modelización algebraico-funcional (Ruiz-Munzón, 2010, Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2011).

A pesar de todo el conocimiento didáctico acumulado, la enseñanza del álgebra escolar continúa proponiéndose como una generalización de la aritmética, provocando el “surgimiento” de las técnicas algebraicas a partir de las técnicas aritméticas de resolución de problemas verbales, identificando así al álgebra con el “lenguaje algebraico”. Las letras, se utilizan para reemplazar los números propuestos como incógnitas en algún problema o como resultado de ecuaciones, que en su mayoría tienen solución única. También las letras aparecen en la denotación de las funciones, ocupando principalmente el lugar de las variables, pero sin una problematización real de su significado. Las fórmulas se reducen a reglas para realizar cálculos numéricos, y no se proponen como el resultado de cálculos algebraicos ni conducen a la generación de nuevos tipos de problemas (Gascón, Bosch y Ruiz-Munzón, 2017).

REVIN
REVISTA INTERNACIONAL DE PESQUISA EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Intentando contribuir a la mejora de la enseñanza del álgebra escolar y considerando los aportes de la TAD, se diseñó un REI para enseñar álgebra en la escuela secundaria desde la perspectiva de la modelización algebraico-funcional (Laplace, Otero, Llanos, 2023). Este es un proceso complejo que se realiza en diferentes etapas de algebrización, cuya emergencia requiere de dispositivos didácticos apropiados como los REI.

Este trabajo está orientado por las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo se caracterizan las etapas del proceso de modelización algebraico-funcional en términos de las tareas realizadas por los estudiantes?
2) ¿Cuáles etapas de dicho proceso es posible describir y reconocer en el modelado de los estudiantes?

Marco teórico

Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2009, 2022). Una noción central formulada por Chevallard ya en 1989 es la de modelización matemática a la que otorga un lugar preponderante y casi excluyente en la actividad matemática. En este sentido, la modelización supone, por un lado, la existencia de un sistema, matemático o no, y un modelo matemático de dicho sistema. El proceso se propone de manera general en tres etapas: 1) se define el sistema a estudiar, se analizan sus aspectos más importantes como las variables en juego y el "dominio de realidad" del fenómeno en cuestión; 2) se construye un modelo matemático, estableciendo relaciones entre las variables y 3) se trabaja en el modelo con el fin de producir conocimiento matemático relativo al sistema estudiado (Chevallard, 1989).

Por su parte, Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2011) describen un desarrollo progresivo de etapas en el proceso de modelización que culmina con la modelización algebraico-funcional, articulando al álgebra que se estudia en la escuela con la enseñanza de funciones. Así, el proceso de modelización algebraico-funcional ocurre cuando se generan modelos algebraicos que permitan el estudio de parámetros y variables, la variación de parámetros, el intercambio de parámetros y variables y relaciones funcionales entre magnitudes de las variables (Otero, 2021).

En este trabajo abordamos la modelización algebraico-funcional a partir del diseño e implementación de un REI para enseñar álgebra en la escuela secundaria.

Los REI

La TAD propone abandonar el paradigma de enseñanza dominante, denominado de la *visita a las obras*, por otro paradigma aún emergente, denominado *paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo* (PICM) (Chevallard, 2013). Por el momento, los REI son el dispositivo didáctico que mejor representa el espíritu del nuevo paradigma, donde la enseñanza se realiza a partir del estudio de preguntas, entendidas también como obras. En el paradigma emergente, ninguna obra se estudia "per se", sino porque permite resolver, tratar, estudiar, al menos parcialmente, las preguntas. El esquema Herbartiano (Chevallard, 2009) es un modelo que describe el estudio de una pregunta Q en un sistema de enseñanza S, es decir, cómo se desarrolla y de qué se compone un REI:

$$[S\,(X;\,Y;\,Q) \rightarrow \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \dots, R_n^{\Diamond}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p, D_p, \dots D_q\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Los REI parten de una pregunta generatriz Q_0 cuyo estudio está a cargo de un grupo X, dirigido por un profesor y, o por un equipo de profesores Y, lo que genera un sistema didáctico S (X; Y; Q_0). Este sistema debe producir una respuesta posible R y para ello, necesita construir un *medio* didáctico M. El *medio* M está compuesto por una sucesión de preguntas $Q_i = Q_{n+1}, \dots, Q_m$, derivadas del estudio, que pueden ser introducidas por los estudiantes o también por el profesor; por las respuestas $R_i^{\Diamond} = R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \dots, R_n^{\Diamond}$ disponibles en la web, libros, textos del profesor, etc.; por obras $O_j = O_{m+1}, \dots, O_p$ que se corresponden con los saberes matemáticos a reconstruir en el estudio y por datos $D_k = D_p, \dots D_q$ como trabajos empíricos o conjuntos de datos obtenidos por el sistema o no (Otero, 2021). Este proceso genera como resultado del estudio $R^{\heartsuit}$ que es una respuesta posible y no definitiva a la cuestión Q_0. En nuestro trabajo, diseñamos un REI a partir de Q_0: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?* Para elaborar una respuesta posible en función de sus necesidades, la clase analiza un conjunto arborescente de preguntas derivadas Q_i por ejemplo: ¿cómo expresar el costo total, la venta y la ganancia de los productos para cualquier cantidad?, ¿cómo analizar qué productos me permiten obtener mayor ganancia en el kiosco?, lo que lleva a analizar el punto de intersección entre dos rectas de ganancia y discutir lo que este punto representa, ¿bajo qué condiciones las ventas de dos productos generan la misma ganancia?, ¿qué parámetro conviene estudiar para obtener una ganancia determinada?

En un análisis preliminar del REI, se analizan los modelos matemáticos que permitirían describir el funcionamiento del kiosco considerando tres etapas generales del proceso de modelización algebraico-funcional que incluyen la elaboración de modelos del sistema, el estudio de posibles parámetros y variables, la variación de los parámetros, el intercambio entre los parámetros y las variables. Por otro lado, luego de realizar las implementaciones del REI en cursos regulares de una escuela secundaria preuniversitaria en Argentina, se analiza a partir de los datos obtenidos, si los estudiantes realizan las tareas características de esas etapas, y se identifican los alcances y las dificultades que en ese proceso se presentan.

Metodología

El REI se implementa en una escuela secundaria preuniversitaria dependiente de una universidad pública en Argentina, en cursos seleccionados intencionalmente, donde el profesor es el investigador. Aquí se reportan resultados de cuatro implementaciones realizadas con 112 estudiantes de 4to año (15 - 16 años de edad).

El corpus de datos se genera a partir de distintos registros. Todas las clases se recogen y digitalizan los protocolos de los estudiantes y, además, se realizan registros audiovisuales que se complementan con las notas de campo del profesor y las producciones de los estudiantes. Durante las clases en todas las implementaciones se utilizan equipos portátiles (netbooks, smartphones, tablets) con acceso a internet y textos proporcionados por el profesor que los alumnos podían considerar o no como necesarios para el estudio y la producción de respuestas posibles. La base empírica de esta investigación contiene más de 1500 protocolos de las producciones de los estudiantes, más de 190 archivos generados en los dispositivos móviles, más de 40 notas de campo realizadas por el profesor y registros audiovisuales de la clase que permiten una adecuada triangulación.

El REI involucra seis tareas que conducen a estudiar, entre otros saberes, las ecuaciones lineales en dos variables y las funciones afines asociadas. Un análisis detallado de la presentación de Q_0 en el aula y de las cuestiones derivadas puede consultarse en Laplace (2022). En la primera tarea se modelan los costos de los productos a la venta en el kiosco; en la segunda el precio de venta; en la tercera se modela la ganancia; en la cuarta se estudian las intersecciones entre dos rectas de ganancia; en la quinta se analiza bajo qué condiciones dos productos podrían o no generar la misma ganancia y en la sexta se considera cómo obtener una ganancia determinada. En la primera y segunda implementación se realizaron las tareas T1, T2, T3 y T4, en la tercera y cuarta implementación las dos restantes T5 y T6, dado que éstas se agregan luego del análisis realizado de las dos primeras implementaciones.

Para analizar los datos, y la modelización algebraico-funcional en el REI, se generan etapas y los respectivos indicadores que se definen como sigue:

Etapa 1 (E_1): Modelos algebraicos lineales en dos variables.

En esta instancia, se generan modelos algebraicos basados en ecuaciones e inecuaciones lineales en dos variables y las funciones afines asociadas. Los tipos de tareas relacionados con el modelado en esta etapa son: formular modelos algebraicos lineales en dos variables con parámetros fijos y no fijos, distinguir entre los parámetros y las variables; analizar las relaciones entre las variables; identificar los valores conocidos del sistema kiosco como parámetros. Además de los tipos de tareas antes mencionados, se realiza el tipo de tarea resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, lo cual requiere de nuevas técnicas ecuacionales, funcionales y gráficas.

Los indicadores considerados en esta etapa son:

- $I_1(E_1)$: Modelos con parámetros fijos y variables denotadas por oraciones y palabras.

Refiere a la generación de los modelos algebraicos (compra, venta, ganancia), donde los parámetros son los valores "conocidos" en el sistema kiosco y las variables se identifican con palabras e incluso oraciones en lenguaje natural.

- $I_2(E_1)$: Modelos con parámetros fijos y una variable expresada por medio de letras.

Refiere a la generación de los modelos (compra, venta, ganancia), donde los parámetros son los valores "conocidos" en el sistema kiosco y en el cual se identifica y renombra una única variable con letras.

- $I_3(E_1)$: Modelos con parámetros fijos y dos variables notadas por medio de letras.

Refiere a la generación de los modelos (compra, venta, ganancia), donde los parámetros son los valores "conocidos" en el sistema kiosco y las dos variables se denotan con letras. Estos modelos pueden asociarse a funciones afines.

- $I_4(E_1)$: Generalización de los modelos con parámetros sin fijar.

Refiere a la generalización de los modelos (compra, venta, ganancia). Se utilizan solo letras, para representar tanto las variables como los parámetros. Estos modelos pueden asociarse con familias de funciones afines.

Los cuatro indicadores mencionados (I_1 a I_4) dan cuenta de la evolución del proceso de modelización algebraico-funcional en la Etapa 1, donde se generan modelos algebraicos. Los que siguen, refieren al tratamiento de las variables y los parámetros en los modelos generados.

- $I_5(E_1)$: Identificación y tratamiento de las variables.

Se identifican las variables, se clasifican y se renombran utilizando letras.

- $I_6(E_1)$: Identificación y tratamiento de los parámetros.

En los modelos generalizados se identifican los parámetros y se los renombra con letras. En los modelos con parámetros fijados se asignan los valores conocidos del kiosco a los mismos, por ejemplo: precio de compra y gasto de envío de los productos.

Etapa 2 (E_2): Modelos algebraicos con variación de parámetros

En esta etapa se estudian los modelos matemáticos expresados mediante ecuaciones lineales en dos variables y las familias de funciones afines asociadas. Los tipos de tareas relacionados con el modelado en esta etapa son: distinguir parámetros de variables; analizar las relaciones entre las variables; variar los parámetros y estudiar el efecto que se produce sobre las características del sistema kiosco. Además de los tipos de tareas antes mencionados, re requiere el uso de nuevas técnicas, ecuacionales considerando el esquema de control de variables (para analizar la variación de los parámetros y sus implicaciones) y también gráficas, que se apoyarán en la *teoría de transformaciones elementales y dilataciones*, así como en las propiedades de los tipos de familias de funciones.

Los indicadores de esta etapa son:

- $I_1(E_2)$: Estudio de la variación de parámetros usando ejemplos.

Se varían los parámetros de los modelos y se analiza el efecto que produce dicha variación sobre las características del sistema kiosco. Se extraen conclusiones utilizando ejemplos de modelos algebraicos con parámetros fijos.

- $I_2(E_2)$: Estudio de la variación de parámetros. Generalización.

Se varían los parámetros de los modelos y se estudia el efecto que produce dicha variación sobre las características del sistema kiosco. Se extraen conclusiones generalizadas para los parámetros.

Etapa 3 (E_3): Modelos algebraicos con intercambio entre variables y parámetros

Se caracteriza por el intercambio entre las variables y los parámetros, lo cual en este caso origina nuevos modelos lineales y racionales. Los mismos pueden expresarse por medio de ecuaciones lineales en dos variables y las funciones afines asociadas y también, por ecuaciones racionales en dos variables y las funciones racionales asociadas. Los tipos de tareas vinculados con el modelado en esta etapa son: intercambiar los parámetros y las variables; generar y estudiar los nuevos modelos, analizar la relación entre sus variables y variar sus parámetros. Además de los tipos de tareas antes mencionados, se requiere del uso de nuevas técnicas ecuacionales, funcionales y gráficas para el tratamiento algebraico de los modelos lineales y racionales.

Los indicadores de esta etapa son:

- $I_1(E_3)$: Intercambio entre variables y parámetros y generación de modelos.

Se intercambian las variables con los parámetros a partir de técnicas ecuacionales aplicadas en modelos lineales. Se generan modelos lineales y racionales.

- $I_2(E_3)$: Identificación de nuevas variables y parámetros denotados con letras.

Se clasifican y renombran con letras las nuevas variables y parámetros que se obtienen del intercambio entre los mismos.

- $I_3(E_3)$: Reconocimiento del modelo racional.

Se generan nuevos modelos racionales en dos variables que se asocian a funciones racionales en una variable.

- $I_4(E_3)$: Estudio de la variación de parámetros de los nuevos modelos.

Se varían los parámetros de los nuevos modelos, lineales y racionales, y se estudia el efecto que produce dicha variación sobre las características del sistema kiosco.

Como instrumento de síntesis, se utilizan dos tablas. La Tabla 1, que permite cuantificar los indicadores correspondientes a la Etapa 1 que serán reconocidos en las tareas T1 a T4 realizadas en las cuatro implementaciones (112 estudiantes en total).

Tabla 1 – Modelo de tabla de indicadores de la Etapa 1.

Etapa	Indicadores	T1	T2	T3	T4
1	$I_1(E_1)$				
	$I_2(E_1)$				
	…				
	$I_6(E_1)$				

Fuente propia (2024).

En la Tabla 2 se sintetizan los indicadores correspondientes a las Etapas 2 y 3, que son específicos de las tareas T5 y T6, que son propias de las implementaciones 3 y 4, por tal motivo sólo se cuenta con 54 estudiantes:

Tabla 2 – Modelo de tabla de indicadores de la Etapa 2 y 3.

Etapa	Indicadores	T5	T6
2	$I_1(E_2)$		
	$I_2(E_2)$		
3	$I_1(E_3)$		
	…		
	$I_4(E_3)$		

Fuente propia (2024).

En lo que sigue, se consideran algunos protocolos de los estudiantes para evidenciar la presencia (o ausencia) de los indicadores de cada etapa.

Análisis y presentación de los resultados

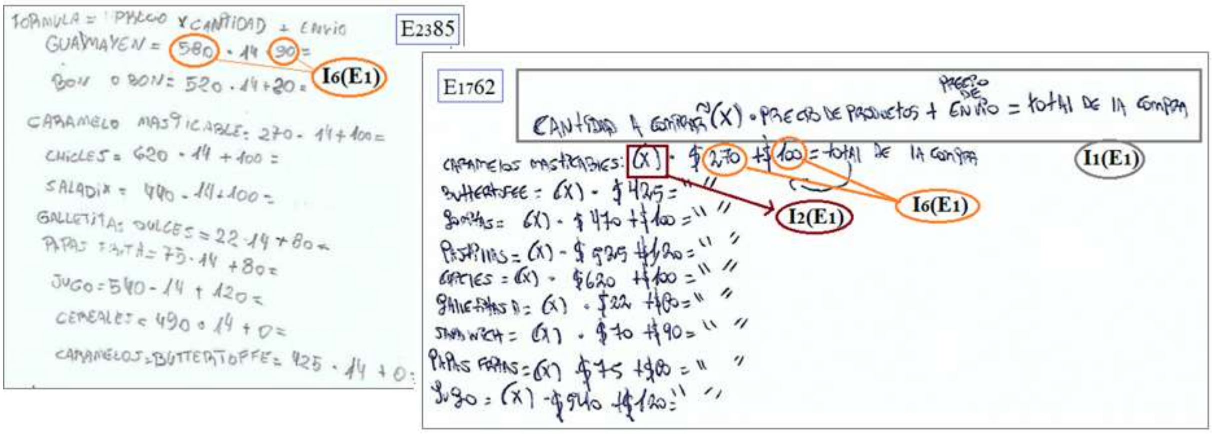
Se incluyen al análisis la totalidad de las tareas desarrolladas en el marco del REI, teniendo en cuenta que las tareas T1 a T4 son específicas de la Etapa 1, y las tareas T5 y T6 corresponden a las Etapas 2 y 3 del proceso de modelización algebraico-funcional. Se seleccionan protocolos de los estudiantes para ejemplificar los desarrollos en cada etapa, y se identifican con E_GN, siendo G el número de grupo al que pertenece cada estudiante, y N el número del total. A partir de estos protocolos, se ejemplifica la presencia o no de los indicadores definidos antes, y también la "evolución" en el desarrollo de los modelos alcanzados por los estudiantes. La tabla que se utiliza como instrumento de síntesis se completa considerando el máximo desarrollo alcanzado por el estudiante dentro de la etapa en cada tarea.

Etapa 1: Modelos algebraicos con parámetros fijos

Teniendo en cuenta que esta etapa es la de “generación de modelos” de compra, venta y ganancia, se seleccionan aquellos protocolos que permiten evidenciar una evolución en el desarrollo de dichos modelos, conforme avanzan las tareas. Aquí se seleccionan tres protocolos de la tarea T1 para mostrar los modelos incipientes, y un protocolo que corresponde a la tarea T3, donde se llega al modelo generalizado con parámetros sin fijar, que en este caso corresponde al modelo de ganancia.

En la Figura 1 se muestran dos protocolos correspondientes a la resolución de la tarea T1, cuyo modelo a reconstruir es el modelo de compra de los productos, a partir de una lista de productos dados, con los costos y un monto fijo máximo para gastar. Estos protocolos correspondientes a $E_{23}85$ y $E_{17}62$ permiten notar los primeros intentos de generación del modelo buscado.

Figura 1– Protocolos de $E_{23}85$ y $E_{17}62$ correspondientes a la tarea T1.

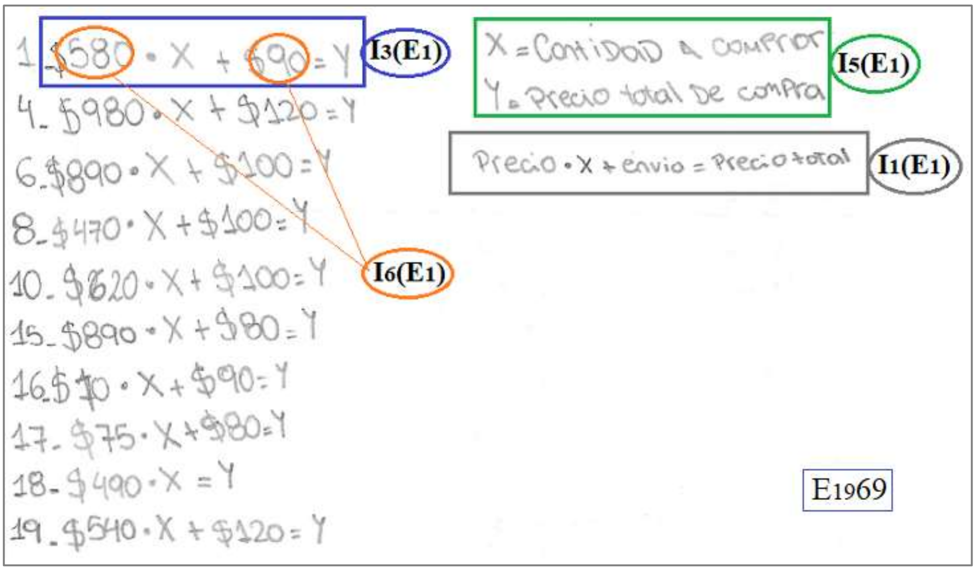


Fuente: datos de la investigación.

El protocolo de $E_{23}85$ expresa en palabras una “fórmula” que podría considerarse como un germen de modelo para representar la compra, dado que no indica ni en los casos puntuales (para cada golosina del kiosco) ni en el “modelo” más general definido en palabras, que lo que se busca es conocer el total de la compra, en su lugar aparece la palabra fórmula. Por tal motivo se considera que no alcanza el modelo que se busca. En cambio, $E_{17}62$ define primero un modelo general de compra, utilizando palabras del lenguaje habitual ($I_1(E_1)$), y además específica los valores de ese modelo para los distintos productos del kiosco seleccionadas para la compra. El indicador $I_6(E_1)$ es común a ambos protocolos porque ambos estudiantes pueden asignar valores específicos al precio y al envío para los productos que eligen, aunque es notable la diferencia entre estos estudiantes porque $E_{23}85$ fija la cantidad de cada golosina en 14, es decir que asume que comprará 14 productos iguales de la lista hasta que se agote el dinero; mientras que desde el inicio, $E_{17}62$ deja como variable la cantidad, que la representa con la letra x, y la variable dependiente la representa con palabras y usa comillas para no repetirla, lo que permite reconocer el indicador $I_2(E_1)$.

El protocolo de $E_{19}69$ de la Figura 2, también corresponde a la tarea T1, aunque el alcance es distinto. A diferencia de los anteriores, aquí se puede notar la presencia de cuatro indicadores (I_1, I_3, I_5 e I_6), aunque se destaca I_3 que describe la presencia de un modelo con parámetros fijos y dos variables, denotadas aquí por las letras x e y.

Figura 2 – Protocolo de $E_{19}69$, correspondiente a la tarea T1.



Fuente: datos de la investigación.

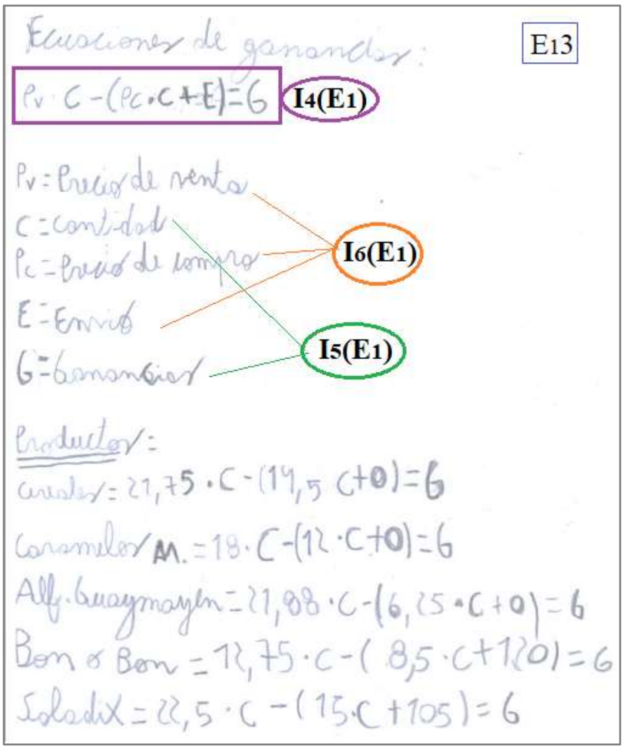
Como se interpreta en la Figura 2, este estudiante construye un modelo lineal en dos variables con parámetros fijos para representar la compra de cada producto del kiosco. El indicador $I_5(E_1)$ refiere a la identificación de las variables del modelo (x e y). Este estudiante

REVIN
REVISTA INTERNACIONAL DE PESQUISA EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

también puede asignar al modelo los valores a los parámetros según la información de los productos a comprar en el kiosco, con lo cual es posible concluir que la generación de modelos lineales en dos variables con el REI es posible desde el inicio, aunque en la tarea T1 son pocos los estudiantes que lo alcanzan.

En términos de desarrollo de un modelo lineal en dos variables, se destaca el protocolo de la Figura 3, correspondiente a $E_1 3$ para la tarea T3.

Figura 3 – Protocolos de $E_1 3$, correspondiente a la tarea T3.



Fuente: datos de la investigación.

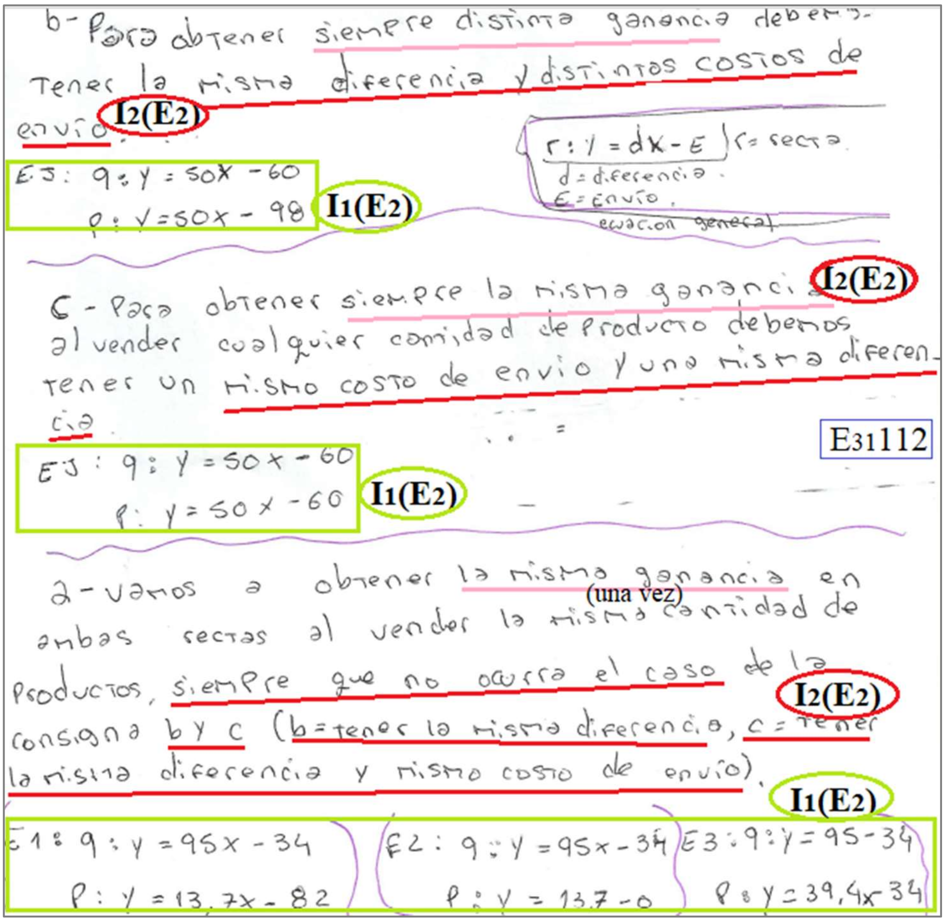
Este estudiante comienza por definir un modelo algebraico generalizado para la ganancia de los productos ($I_4(E_1)$), es decir los parámetros y las variables son genéricos. En consecuencia, los indicadores $I_5(E_1)$ identificación de las variables e $I_6(E_1)$ identificación de los parámetros, se expresan mediante letras, y además se otorga a los parámetros valores específicos para los diferentes casos, donde este estudiante está interesado en conocer las ganancias que se obtendrían para ciertos productos del kiosco.

Etapa 2: Modelos algebraicos con variación de parámetros

Esta etapa de la "variación de parámetros" para el modelo de ganancia, es una consecuencia de la tarea T4, dado que los tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, para el modelo de ganancia de dos productos del kiosco, está determinado por la variación de los dos parámetros de $G = (P_v - P_c) \cdot c - e$, siendo P_v el precio de venta del producto, P_c el precio de compra, c la cantidad y e los gastos de envío; y teniendo en cuenta que $P_v - P_c = d$. La tarea T5 entonces es relativa a dicho análisis, y se busca identificar las condiciones para los parámetros que cumplan con dos productos del kiosco que den igual ganancia, que siempre den la misma ganancia y que nunca den igual ganancia; teniendo en cuenta la complejidad que el parámetro d introduce al sistema, dado que d depende de P_v y de P_c.

La Figura 4 corresponde al protocolo de $E_{31}112$ donde se realiza una síntesis de las conclusiones obtenidas de la variación de los parámetros del modelo de ganancia para dos productos. El análisis lo realizan en la clase utilizando deslizadores para asignar distintos valores a d y e en el software GeoGebra. Se destaca el hecho de que para que dicho análisis sea posible, se acuerda con los estudiantes que es necesario renombrar las variables del modelo como $y = d \cdot x - e$, pues son las letras autorizadas para ingresar al software. Las conclusiones que obtienen se desprenden de la identificación de las distintas posiciones que adoptan las rectas al variar sus parámetros, considerando la técnica de control de variables.

Figura 4 – Protocolo de $E_{31}112$, correspondiente a la tarea T5.



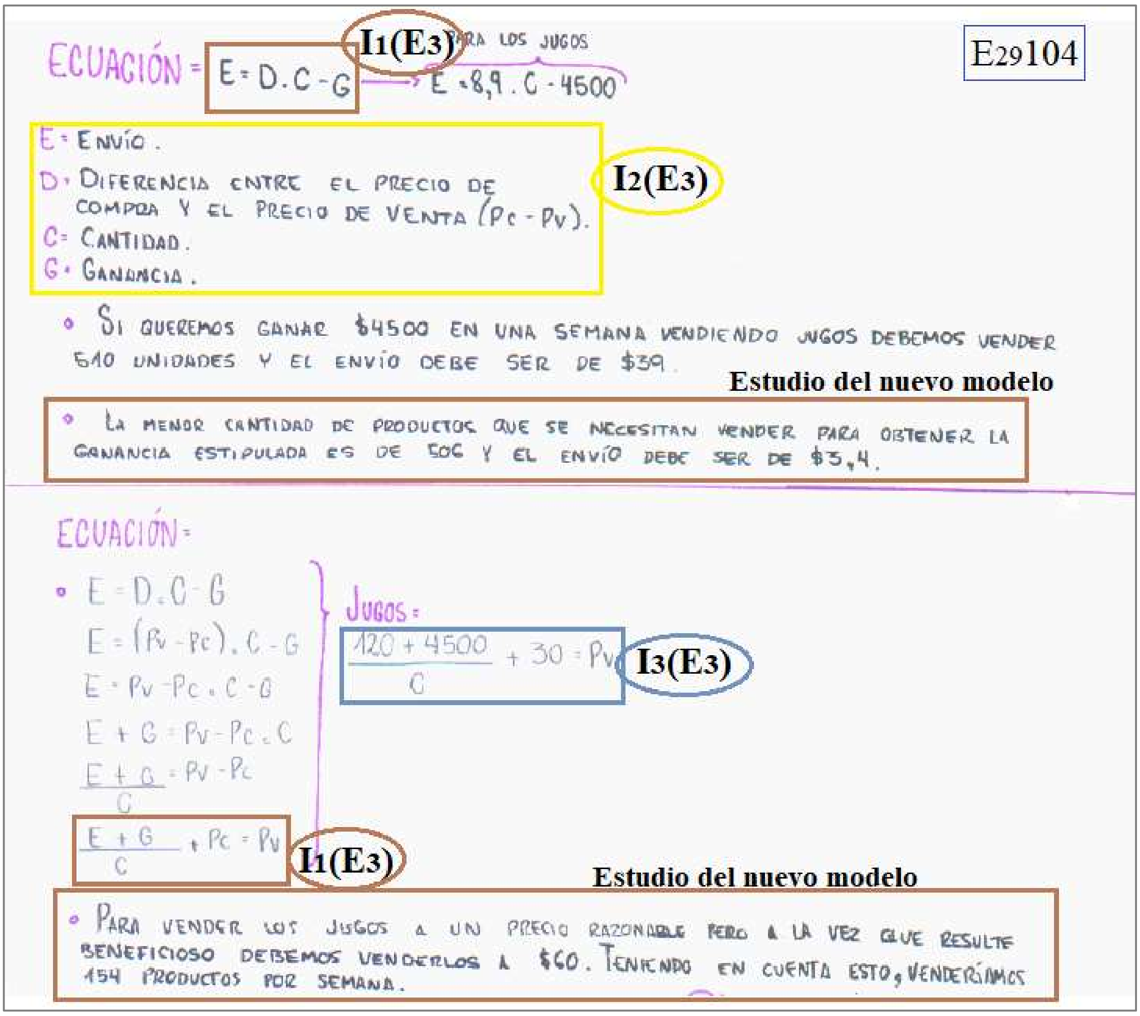
Fuente: datos de la investigación.

Del protocolo se desprende que: para obtener siempre distinta ganancia (sistema incompatible), *d* debe ser igual en ambos modelos ($d = 50$) y *e* diferente, ($e = 60$ y $e = 98$); para obtener siempre la misma ganancia (sistema compatible indeterminado), *d* y *e* deben ser iguales en ambos modelos ($d = 50$ y $e = 60$); mientras que para analizar cuando ambos modelos tienen la misma ganancia (sistema compatible determinado), *d* debe ser distinto en ambos modelos ($d = 95$ y $d = 13{,}7$) y *e* también diferente, ($e = 34$ y $e = 82$, por ejemplo). El indicador $I_2(E_2)$ se reconoce en la tarea realizada en el software, que es lo que les permite elaborar las conclusiones, por tal motivo las mismas llevan el nombre del indicador. El $I_1(E_2)$ está en los ejemplos de los posibles valores que asumen los parámetros en cada caso.

Etapa 3 (E_3): Modelos algebraicos con intercambio entre parámetros y variables

En esta etapa el “intercambio entre variables y parámetros” se realiza también desde el modelo de ganancia, partiendo de considerar el objetivo de una ganancia fija. Es decir, la variable dependiente se transforma en un parámetro, y los parámetros e, P_v y P_c son variables, tomadas de a una. Con esta decisión de fijar la ganancia esperada $G = (P_v - P_c) \cdot c - e$, dependiendo qué parámetro se transforma en variable se construyen modelos lineales o modelos racionales en dos variables. En la Figura 5 se presenta el protocolo de $E_{29}104$ para la tarea T6.

Figura 5 – Protocolo de $E_{29}104$, correspondiente a la tarea T6.

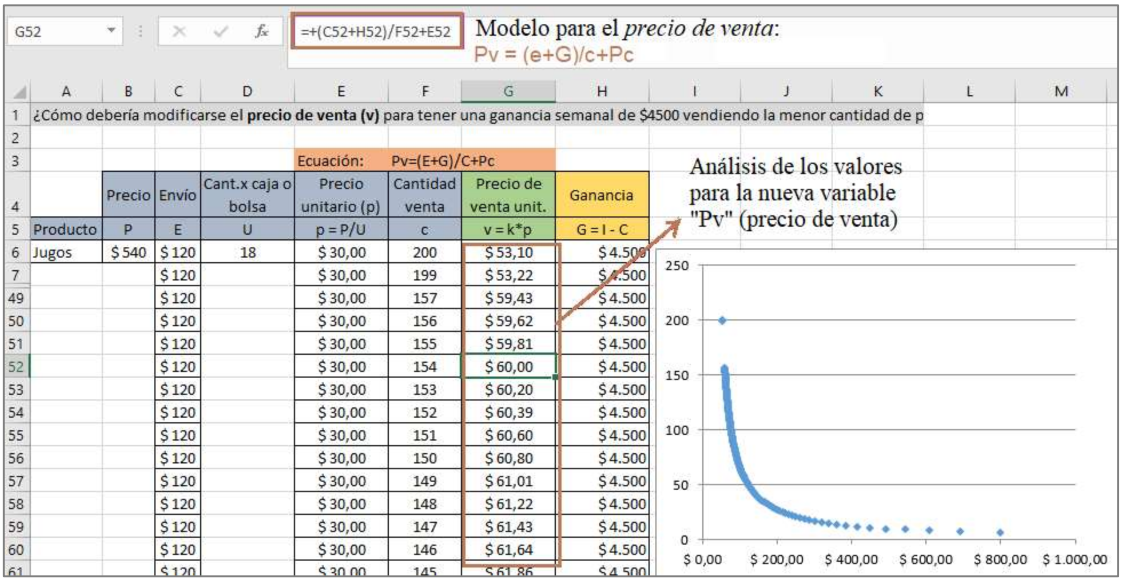


Fuente: datos de la investigación.

REVIN
Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática

En el protocolo de la Figura 5 se identifica con el indicador I1(E3) a los nuevos modelos obtenidos a partir del intercambio entre las variables y los parámetros, que son: $e = d \cdot c - G$, con $d = P_v - P_c$ y $\frac{G+e}{c} + P_c = P_v$. No se identifica en el protocolo el modelo para el $P_c = -\frac{G+e}{c} + P_v$ que se obtendría de manera análoga al de P_v. También se reconoce el indicador I2(E3) cuando se utilizan letras para definir las nuevas variables y los nuevos parámetros. Los modelos que se generan en esta tarea corresponden en el primer caso a una ecuación lineal en dos variables y en el segundo a una ecuación racional, la cual permite identifica al indicador I3(E3). Se destaca el hecho de seleccionar un mismo producto del kiosco "jugo" para analizar la información que proporcionan dichos modelos, y la conclusión al final se desprende del análisis numérico que se realiza en la Figura 6 para el caso del P_v.

Figura 6 – Protocolo Grupo 29, correspondiente a la tarea T6.



G52 =+(C52+H52)/F52+E52

1 ¿Cómo debería modificarse el **precio de venta (v)** para tener una ganancia semanal de $4500 vendiendo la menor cantidad de p

3 Ecuación: Pv=(E+G)/C+Pc

	A	B	C	D	E	F	G	H
4		Precio	Envío	Cant.x caja o bolsa	Precio unitario (p)	Cantidad venta	Precio de venta unit.	Ganancia
5	Producto	P	E	U	p = P/U	c	v = k*p	G = I - C
6	Jugos	$ 540	$ 120	18	$ 30,00	200	$ 53,10	$ 4.500
7			$ 120		$ 30,00	199	$ 53,22	$ 4.500
49			$ 120		$ 30,00	157	$ 59,43	$ 4.500
50			$ 120		$ 30,00	156	$ 59,62	$ 4.500
51			$ 120		$ 30,00	155	$ 59,81	$ 4.500
52			$ 120		$ 30,00	154	$ 60,00	$ 4.500
53			$ 120		$ 30,00	153	$ 60,20	$ 4.500
54			$ 120		$ 30,00	152	$ 60,39	$ 4.500
55			$ 120		$ 30,00	151	$ 60,60	$ 4.500
56			$ 120		$ 30,00	150	$ 60,80	$ 4.500
57			$ 120		$ 30,00	149	$ 61,01	$ 4.500
58			$ 120		$ 30,00	148	$ 61,22	$ 4.500
59			$ 120		$ 30,00	147	$ 61,43	$ 4.500
60			$ 120		$ 30,00	146	$ 61,64	$ 4.500
61			$ 120		$ 30,00	145	$ 61,86	$ 4.500

Fuente: datos de la investigación.

En las implementaciones realizadas, no se aborda la variación de parámetros de estos nuevos modelos I4(E3), aunque es totalmente posible y generaría la posibilidad de una salida al estudio de las funciones racionales.

Con el objetivo de sintetizar los resultados obtenidos, se cuenta la cantidad de estudiantes que se identifica con cada indicador, primero en las tareas T1 a T4 específicas de la generación de los modelos lineales en dos variables (Tabla 3) y luego para las tareas T5 y T6

(Tabla 4) que son específicas de las últimas dos implementaciones. En la tabla, N refiere al total de estudiantes que participaron de cada tarea.

Tabla 3 – Frecuencia de aparición de los indicadores de la Etapa 1.

Etapa	Indicadores	T1	T2	T3	T4
		N=105	N=110	N=111	N=97
1	$I_1(E_1)$: Modelos con parámetros fijos y variables denotadas por oraciones y palabras.	13	9	3	0
	$I_2(E_1)$: Modelos con parámetros fijos y una variable expresada por medio de letras.	5	0	4	1
	$I_3(E_1)$: Modelos con parámetros fijos y dos variables notadas por medio de letras.	60	40	42	88
	$I_4(E_1)$: Generalización de los modelos con parámetros sin fijar.	19	38	62	0
	$I_5(E_1)$: Identificación y tratamiento de las variables.	68	58	82	9
	$I_6(E_1)$: Identificación y tratamiento de los parámetros.	92	72	108	89

Fuente propia (2024).

De la tabla observamos que desde la tarea T1, más de la mitad de los estudiantes logran construir modelos algebraicos con parámetros fijos y dos variables en letras ($I_3(E_1)$) que es el objetivo de estas tareas. Sólo 13 estudiantes no pueden superar un modelo “verbal” $I_1(E_1)$ en la tarea T1, pero si en las sucesivas. Además, son pocos los estudiantes (solo un 20%) que en la tarea T1 logran una generalización del modelo de compra, utilizando letras tanto en las variables como en los parámetros ($I_4(E_1)$). La mayoría lo puede hacer más adelante para los modelos de venta y ganancia. En general, los estudiantes realizan un tratamiento adecuado de las variables del modelo hallado $I_5(E_1)$ y también pueden otorgar a los parámetros del modelo los valores correspondientes a los productos del kiosco($I_6(E_1)$). Sintéticamente podemos concluir que a medida que se pasó por las distintas tareas, la mayoría de los estudiantes puede construir un modelo general y se logra para el caso de la ganancia. También habría sido posible volver sobre los modelos de compra y venta de los productos, y eso permitiría “hacer evolucionar” los modelos incipientes que dieron origen al estudio.

La Tabla 4 sintetiza los indicadores definidos para la Etapa 2 en la tarea T5 y la Etapa 3 en la tarea T6, y corresponden a los estudiantes de las últimas dos implementaciones, que en total son N=54.

Tabla 4 – Frecuencia de aparición de los indicadores de la Etapa 2 y 3.

Etapa	Indicadores	T5	T6
		N=45	N=54
2	$I_1(E_2)$: Estudio de la variación de parámetros usando ejemplos.	4	-
	$I_2(E_2)$: Estudio de la variación de parámetros. Generalización.	32	-
3	$I_1(E_3)$: Intercambio entre variables y parámetros y generación de modelos.	-	53
	$I_2(E_3)$: Identificación de nuevas variables y parámetros denotados con letras.	-	25
	$I_3(E_3)$: Reconocimiento del modelo racional.	-	42
	$I_4(E_3)$: Estudio de la variación de parámetros de los nuevos modelos.	-	0

Fuente propia (2024).

Los indicadores de la Etapa 2 sólo fueron alcanzados por 36 estudiantes, lo que explica que 9 de ellos no pudieron generar el análisis de la variación de parámetros, aun cuando la tarea T5 lo solicita. El esquema de control de variables se aplica en todos los casos al análisis con deslizadores realizado en el software GeoGebra, para observar la posición de las rectas y concluir a partir de los valores proporcionados a los parámetros ($I_2(E_2)$).

Con relación a los indicadores de la Etapa 3, casi la totalidad de los estudiantes llegan a reconstruir nuevos modelos, a partir del intercambio de variables y parámetros $I_1(E_3)$ e $I_3(E_3)$, aunque los modelos racionales no se reconocen como tales, pueden analizar los resultados incluso gráficos cuando por primera vez obtienen una representación que no es una recta. No se hallan registros del indicador $I_4(E_3)$ ya que no se llegó a estudiar la variación de parámetros de los nuevos modelos, siendo la misma no solo importante sino además posible con el REI.

Discusión

Los resultados analizados permiten confirmar que la generación de modelos algebraicos lineales y racionales ha sido posible. El paso por las distintas tareas permite reflejar un trabajo matemático destacado en lo relativo a la construcción de dichos modelos, pasando de un lenguaje de lo natural hacia la definición de parámetros y variables con letras, que no son los habitualmente utilizados, sino que fueron propuestos para otorgar sentido al sistema que se estudia. Una dificultad señalada en el funcionamiento de la clase ha sido relativa al análisis de la variación de parámetros, que constituyó un obstáculo y que se refleja en que dicho análisis no se realiza para los modelos racionales construidos, pero ahora consideramos que es posible y llevaría al estudio en profundidad de las funciones racionales.

En la Etapa 1 del proceso de modelización algebraico-funcional, la mayoría de los estudiantes transita un proceso que determina una "evolución", dado que mayoritariamente los estudiantes superan la formulación de los modelos con palabras en lenguaje natural y llegan a escribir modelos lineales en dos variables donde los parámetros al inicio se representan con números, es decir están fijos y luego se generalizan con letras.

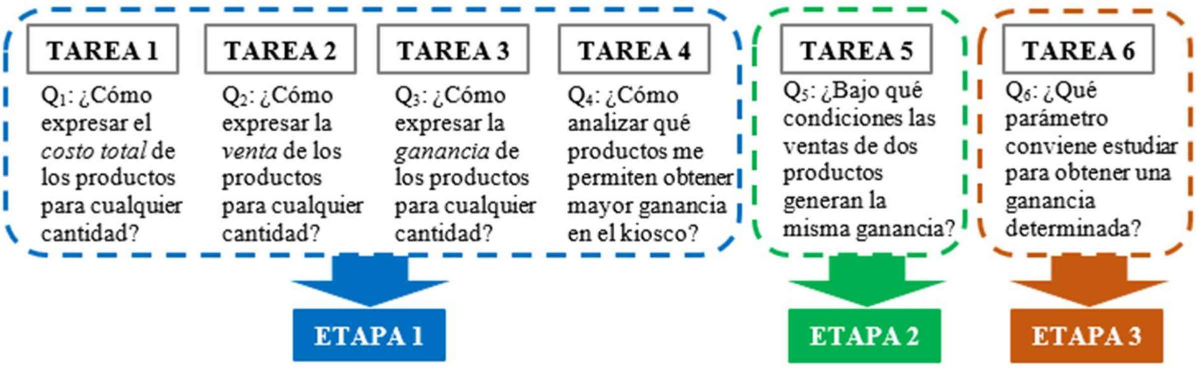
Con relación a la identificación de las variables del modelo, son pocos los estudiantes que expresan una variable con palabras (en general la variable dependiente) y la otra con letras, sin hacer referencia a la relación entre ellas. Esto fue cambiando entre las primeras cuatro tareas, lo que explicaría también la evolución a la que hemos hecho referencia.

El uso de la herramienta GeoGebra, y específicamente la programación de deslizadores permitió de manera relativamente sencilla, visualizar las transformaciones en los modelos analizados, conforme cambian los valores que pueden asumir los parámetros. Establecer las condiciones para los parámetros, y la vista gráfica del Geogebra es crucial para la elaboración de las conclusiones. Muy pocos estudiantes pueden además analizar los resultados obtenidos, para casos específicos del kiosco. Sería deseable que en lo sucesivo el análisis de la variación de parámetros retome los casos particulares de los modelos de compra, venta y ganancia, que es como comienza el proceso de modelización algebraico-funcional, otorgando a los parámetros diferentes valores según los productos que selecciona cada estudiante para armar el kiosco, y otros que se puedan considerar. Es por tal motivo que luego de este análisis concluimos que queda por investigar y estudiar el efecto que la variación de los parámetros produce en cada modelo (de costo, venta o ganancia), lo que daría lugar al estudio de la teoría de transformaciones elementales y dilataciones a partir de técnicas ecuacionales y gráficas.

Se destaca también el alcance del REI para generar los "nuevos" modelos que son el resultado de realizar un intercambio entre las variables y los parámetros. Estos modelos construidos se corresponden con modelos lineales y racionales. Este último, genera una resistencia por parte de los estudiantes, dado que es nuevo para ellos, y el profesor considera a la hoja de cálculo como una opción viable para analizar su comportamiento tanto numérico como gráfico. En estas implementaciones, no se realizó un tratamiento exhaustivo de las ecuaciones y funciones racionales, entre otras cosas porque el tiempo escolar no lo permitía y además este saber no está indicado entre los que corresponde en el año donde se realizó el estudio. Pero consideramos que sería muy importante en las próximas implementaciones de este REI incluir un estudio de las funciones racionales que se corresponden con un cociente entre dos funciones afines, que sí son objeto de estudio del año escolar donde se lleva a cabo la propuesta.

En la Figura 7 se sintetizan las etapas de dicho proceso, agrupando las tareas que permitieron su desarrollo y las grandes preguntas que surgieron de Q_0, y que de cierto modo son las que han orientado el estudio del REI.

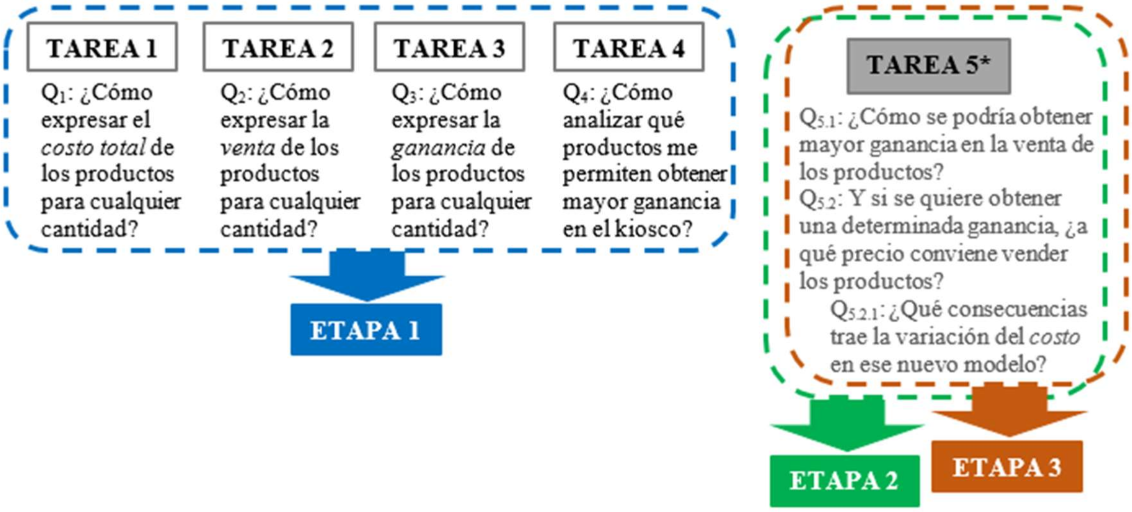
Figura 7 – Etapas del proceso de modelización algebraico-funcional y preguntas.



Fuente propia (2024).

Por otro lado, identificamos una falta de registro de indicadores de la Etapa 3 en la tarea T5 y de indicadores de la Etapa 2 en la tarea T6. Esto indica que las tareas se concibieron de manera independiente, cuando podrían mutuamente haber potenciado el estudio del análisis de variación de los parámetros de los modelos construidos, y a intercambiar en otros casos las variables y los parámetros considerando así otros modelos. Pensamos que la tarea T5*, detallada en la Figura 8, podría resolver este problema y reemplazar a las T5 y T6 que se trataron de forma separada.

Figura 8 – Etapas del proceso de modelización algebraico-funcional y preguntas con T5*.



Fuente propia (2024).

La pregunta $Q_{5.1}$ requiere del análisis de la variación de parámetros del modelo de ganancia. $Q_{5.2}$ es específica del intercambio de variables y parámetros y la generación de un nuevo modelo racional, con el *precio de venta* como variable, y $Q_{5.2.1}$ relativa a la variación del parámetro *precio de compra* en el nuevo modelo de *precio de venta*. Así, la tarea T5* que se propone como consecuencia de este análisis, permitiría reconocer los indicadores correspondientes a las Etapas 2 y 3 del proceso de modelización algebraico-funcional.

De esta manera se podría demostrar que la Etapa 1 remite a la generación de modelos algebraicos, mientras que las Etapas 2 y 3 se caracterizan por la utilización de los modelos generados en la etapa anterior, el análisis de parámetros y las condiciones de éstos en el sistema; y la transformación entre las variables y los parámetros que dan lugar a nuevos modelos y su respectivo análisis.

Conclusiones

El REI que se genera con la pregunta generatriz Q_0: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?* resulta una herramienta de modelización apropiada para la enseñanza del álgebra escolar. Las tareas que se proponen con el REI promueven el modelado por medio de la gestión del kiosco escolar, que implica generar los modelos de compra, venta y ganancia, partiendo de la consideración de múltiples productos con diferentes precios y gastos de envío, además de un monto fijo de dinero para realizar la primera compra de los productos del kiosco y de otros desarrollos vinculados al análisis de dichos modelos, específicamente el de ganancia, con el fin de identificar los principales beneficios del kiosco.

El proceso de modelización algebraico-funcional en el REI podría definirse como una evolución de los modelos más elementales, enunciados en principio en un lenguaje natural, hacia modelos algebraicos, representados por variables y parámetros.

Con relación a la implementación del REI, el problema se presenta para el profesor, en la gestión del mismo, porque no es fácil en una institución habitual "romper" con la estructura de un profesor que explica y cumple con el programa en el orden en que los saberes son propuestos para comunicar. En los estudiantes, se ve una resistencia solo al inicio, por los cambios antes mencionados en el funcionamiento de la clase, y con relación al saber, porque estos manifiestan estar involucrados en tareas que son poco frecuentes, y que se diferencian de las que habitualmente se realizan en la escuela. En general cuando se estudia álgebra, hay una reducción a lo que se denomina "*…pasar del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico…*", que no existe, o una tendencia a resolver una lista de ecuaciones de características similares, actividades que guardan mucha distancia con el alcance que este REI propone. Una consecuencia notable de esta práctica se refleja en la tendencia inicial a expresar los modelos en palabras, independientemente de si ya han utilizado únicamente letras para escribir el mismo modelo. El estudio revela otra dificultad en el análisis de la variación de los parámetros del modelo, que tampoco es habitual ni ha sido lo suficientemente explotada en las implementaciones realizadas, salvo por la recurrencia al software GeoGebra, aspecto a superar en las próximas implementaciones. También sería deseable hacer evolucionar el REI hacia el estudio en profundidad de cada modelo generado y del modelo racional en particular lo que permitiría completar la Etapa 3 del proceso de modelización algebraico-funcional que está ausente en la escuela secundaria actual, y que sería alcanzable con el REI.

Referencias

BOLEA, P., BOSCH, M., GASCÓN, J. La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, v. 21, n. 3, p. 247-304, 2001.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique, **Petit x**, v. 5, p. 51-94, 1984.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. **Petit x**, v. 19, p. 43-72, 1989.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l’arithmétique a l’algébrique dans l’enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d’attaque et problèmes didactiques. **Petit x**, v. 23, p.5-3, 1990.

CHEVALLARD, Y. Enseignement de l’algèbre et transposition didactique. **Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino**, v. 52, n. 2, p. 175-237, 1994

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. La notion de PER : problèmes et avancées, 2009. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

CHEVALLARD, Y. Enseñar matemática en la Sociedad de mañana: alegato a favor de un Contraparadigma Emergente. **Journal of Research in Mathematics**, v. 2, n. 2, p.161-182, 2013. doi:10.4471/redimat.2013.26

CHEVALLARD, Y., & STRØMSKAG, H. Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. **Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático: Fundamentos teórico-metodológicos para a formação**. 2022

GASCÓN, J. La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. **Educación Matemática**, v. 11, n. 1, p.77-88, 1999.

GASCÓN, J.; BOSCH, M.; RUIZ MUNZÓN, N. El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En Muñoz, José María; Arnal-Bailera, Alberto; Beltrán-Pellicer, Pablo; Callejo, María Luz; Carrillo, José (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XXI**, Zaragoza: SEIEM, p. 26-47, 2017.

LAPLACE, E. Análisis matemático y didáctico de una pregunta generatriz para enseñar afinidades y ecuaciones lineales en dos variables en la escuela secundaria**. REIEC**, Buenos Aires, v. 17, n.2, p. 73-80, 2022.

LAPLACE E., OTERO M. R., LLANOS V. C. Recorrido de estudio e investigación para enseñar afinidades y ecuaciones lineales en dos variables en la escuela secundaria. En Actas de la **XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM): International Commission on mathematical Instruction (ICMI).** Universidad de Lima. Perú, 2023.

OTERO, M. R. **La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento**. Libro digital. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos. 2021.

RUIZ-MUNZÓN, N. (2010). **La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional**. Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, M. Y GASCÓN, J. Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, M. Larguier (Eds.), **Un panorama de la TAD** (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica. 2011