

## Enseñar nociones fundamentales de mecánica cuántica en secundaria para explicar fenómenos luminosos: de Fermat a Feynman

1

## Ensinar noções fundamentais de mecânica quântica no ensino médio para explicar fenômenos luminosos: de Fermat a Feynman

## Teaching fundamental notions of quantum mechanics in secondary school to explain light phenomena: from Fermat to Feynman

María Rita Otero<sup>1</sup>  
Marcelo Arlego<sup>2</sup>

**Resumen:** En este artículo analizamos las bases de una propuesta que permite enseñar las nociones de reflexión, refracción, interferencia y difracción, desde una perspectiva unificada de Richard Feynman en su formulación de la suma de caminos para la mecánica cuántica. Esto permite reconsiderar las nociones de óptica geométrica y física, utilizando el modelo probabilístico y unificado de la mecánica cuántica, por medio de nociones matemáticas accesibles a los estudiantes de secundaria.

**Palabras-clave:** luz, cuántica, interferencia, escuela secundaria.

**Resumo:** Neste artigo analisamos as bases de uma proposta que permite ensinar as noções de reflexão, refração, interferência e difração, a partir de uma perspectiva unificada de Richard Feynman em sua formulação da soma de caminhos para mecânica quântica. Isso nos permite reconsiderar as noções de óptica geométrica e física, utilizando o modelo probabilístico e unificado da mecânica quântica, por meio de noções matemáticas acessíveis aos estudantes do ensino médio.

**Palavras-chave:** luz, quantum, interferência, ensino médio, Feynman.

**Abstract:** In this article we analyze the bases of a proposal that allows teaching the notions of reflection, refraction, interference and diffraction, from the unified perspective of Richard Feynman in his formulation of the paths sum for quantum mechanics. This allows reconsidering the notions of geometrical and physical optics, using the probabilistic and unified model of quantum mechanics, by means of mathematical notions that are accessible to high school students.

**Keywords:** light; quantum; interference; secondary school; Feynman.

Submetido 10/03/2025

Aceito 22/08/2025

Publicado 02/09/2025

---

<sup>1</sup> Phd em Ensino de Ciências. Núcleo de Investigación em Enseñanza de las Ciencias y la tecnología (NIECyT). Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Consejo nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. (CONICET). <https://orcid.org/0000-0002-1682-9142> . [rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar](mailto:rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar)

<sup>2</sup> Phd em Física. Núcleo de Investigación em Enseñanza de las Ciencias y la tecnología (NIECyT). Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Consejo nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. (CONICET). <https://orcid.org/0000-0001-9595-826X> . [marlego@niecyt.exa.unicen.edu.ar](mailto:marlego@niecyt.exa.unicen.edu.ar)

## Introducción

La luz y sus fenómenos son de interés universal, tanto en la educación formal como informal (Ravanis & Boilevin, 2009; Ravanis, 2013). Se estudian principalmente a través de dos modelos: la óptica geométrica, basada en el concepto de rayo, y la óptica ondulatoria clásica. Sin embargo, conceptos avanzados como la mecánica ondulatoria, la relatividad especial y la mecánica cuántica rara vez se enseñan en la escuela (Gonzalez et al., 2020; Alvarado Puentes et al., 2020; Perales Palacios, 1994). Aunque se abordan algunos aspectos de óptica y electromagnetismo, se omiten fenómenos clave como la interferencia y la difracción, y el enfoque cuántico es casi inexistente (Otero & Arlego, 2023). Esto limita la comprensión y exploración de los fenómenos en diferentes escalas. En investigaciones previas, diseñamos una secuencia didáctica para enseñar el comportamiento cuántico de la materia, enfocándonos en el electrón y la transición cuántico-clásica. Esta propuesta fue implementada exitosamente en Argentina y Colombia con estudiantes de 16 a 17 años (Fanaro et al., 2009, 2012a, b, c, d; 2014; Otero & Fanaro, 2020; Alvarado Puente, 2015).

Para enseñar el comportamiento de la luz utilizando la integral de camino de Feynman, empleamos vectores y sumas vectoriales en una secuencia de experimentos simples relacionados con la reflexión, refracción y el experimento de la doble rendija. La propuesta fue aplicada en cuatro cursos de física en una escuela secundaria argentina, con 83 estudiantes durante tres horas semanales durante ocho semanas (Elgue, 2015).

Este trabajo propone una secuencia didáctica para enseñar de manera conjunta nociones básicas de óptica geométrica, ondulatoria y cuántica en la escuela secundaria, sin necesidad de profundizar en el tratamiento matemático de las ondas.

## El principio de Fermat

En 1650 Fermat (1601-1665) enunció un principio fundamental para los rayos de luz, que sigue vigente en la actualidad: de todos los caminos que puede seguir la luz para ir de un punto a otro, siempre “elige” el que corresponde al menor tiempo. Esto se enmarca en los principios variacionales, que expresan matemáticamente el hecho de que un fenómeno natural parece ocurrir de la forma más óptima posible.

Como sabemos, el índice de refracción asociado a un medio dado se define por:

$$n = \frac{c}{v}$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $v$  la velocidad de la luz en ese medio. El tiempo de recorrido se puede expresar como:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{s n}{c}$$

siendo  $s$  la distancia recorrida por la luz en el medio. Así, en un medio homogéneo, el tiempo mínimo corresponde a la propagación rectilínea (el camino más corto).

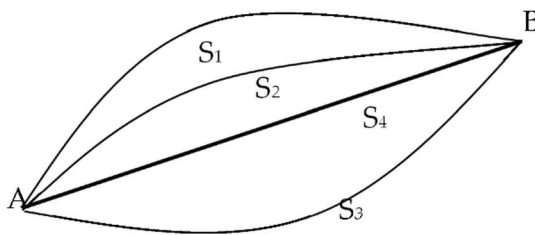


Figura 1. Representación del Principio de Fermat. El camino de menor tiempo es  $S_4$

Sin embargo, si el medio cambia, minimizar el tiempo implica viajar "lo más posible" en el medio con mayor velocidad, es decir, con menor  $n$ . Por esta razón, en la refracción, el camino de la luz se "quiebra" al pasar de un medio a otro.

### Reflexión Clásica

Como es sabido, las leyes de la reflexión clásica se pueden deducir a partir del principio de Fermat. Para ello consideremos un haz de luz que se propaga desde el punto A al punto B, reflejándose en un espejo plano.

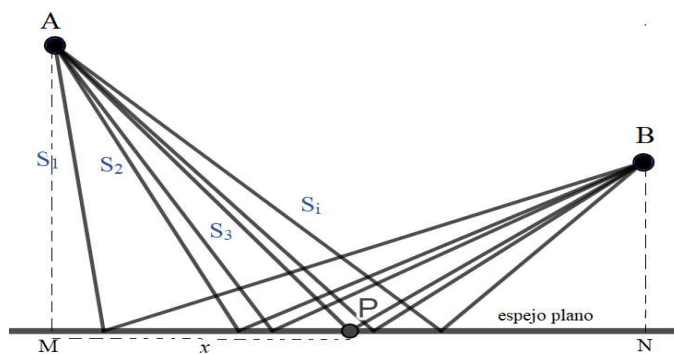


Figura 2. Posibles caminos de un haz de luz reflejado en un espejo plano. Los rayos que inciden en P corresponden al camino de tiempo mínimo.



Se pueden considerar infinitas trayectorias para el haz de luz, según el punto del espejo donde el haz se refleja. La posición del punto P en la Figura 2, es la que corresponde a la trayectoria real. Los puntos M, N representan la intersección de las proyecciones ortogonales de los puntos A y B sobre el espejo plano y x la distancia de P al punto M. Así, escribimos:

$$AM = h_1, BN = h_2, MN = l$$

Entonces

$$MP = x$$

$$PN = l - x$$

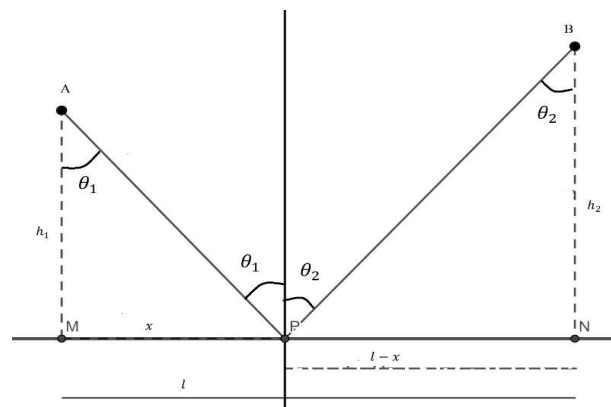


Figura 3. Cálculo del camino de tiempo mínimo en la reflexión clásica.

La longitud de la trayectoria del haz de luz será:

$$S = AP + PB = \sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}$$

El tiempo que tarda la luz en recorrer un cierto s será

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}{v} = n \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}{c}$$

Aplicando el Principio de Fermat, se calcula la derivada del tiempo que la luz tarda en recorrer un cierto camino y se la iguala a cero<sup>3</sup>, de lo cual resulta:

<sup>3</sup> Nótese que el criterio de la primera derivada nula en un punto es condición necesaria para mínimo relativo, pero no suficiente. Para tener un mínimo relativo la derivada segunda debe ser positiva en el punto. No elaboramos más aquí (ni en lo que sigue) sobre esto, pero se puede mostrar que el punto de reflexión es mínimo absoluto en este caso.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(l - x)}{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}$$

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2$$

$$\theta_1 = \theta_2$$

Es decir, el tiempo es mínimo si los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales, esta es la ley clásica de la reflexión.

### Refracción Clásica

De manera similar, se obtiene la ley de Snell-Descartes para la refracción clásica utilizando el Principio de Fermat. Si un haz de luz se propaga desde el punto A en un medio de índice de refracción  $n_1$  hacia un punto B en un medio de índice de refracción  $n_2$  podemos considerar infinitas trayectorias que difieren por la posición del punto P sobre la interfase en donde incide la luz.

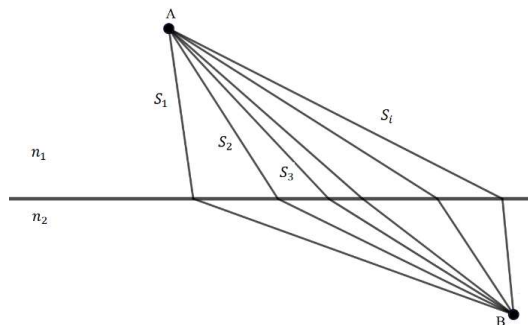


Figura 4. Posibles caminos de un haz de luz refractado al pasar de un medio a otro, conectando los puntos A y B.

Considerando una de las posibles trayectorias S que puede seguir la luz (Figura 5).

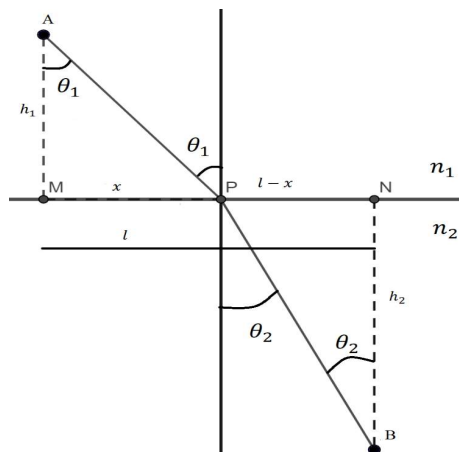


Figura 5. Cálculo del camino del tiempo mínimo en la refracción clásica.

La longitud está dada por:

$$S = AP + PB = \sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}$$

Y el tiempo que la luz tarda en recorrer S será

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}{v_2} = n_1 \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c} + n_2 \frac{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}{c}$$

Aplicando el Principio de Fermat, se calcula la derivada del tiempo y se la iguala a cero, de lo cual resulta

$$\frac{x n_1}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(l-x)n_2}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

La relación anterior, denominada Ley de Snell, debe cumplirse para el camino de tiempo mínimo en la refracción clásica.

Una aplicación interesante de la ley de Snell, ocurre cuando se tienen dos medios de índices de refracción  $n_1, n_2$ , siendo  $n_2 > n_1$  y la fuente de luz está localizada en el medio de mayor índice de refracción<sup>4</sup>. Según la ley de Snell:  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$  el ángulo de refracción  $\theta_1$  siempre es mayor que el ángulo de incidencia  $\theta_2$ . La Figura 6 muestra el caso límite, que ocurre cuando el rayo refractado es paralelo a la interfase entre ambos medios (color rojo). El valor del ángulo de incidencia límite  $\theta_{2 \text{ lim}}$  (para el cual  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ) cumple la condición:

$$\sin \theta_{2 \text{ lim}} = \frac{n_1}{n_2}$$

<sup>4</sup> Aquí la incidencia es en el medio 2, al revés que en la sección anterior.

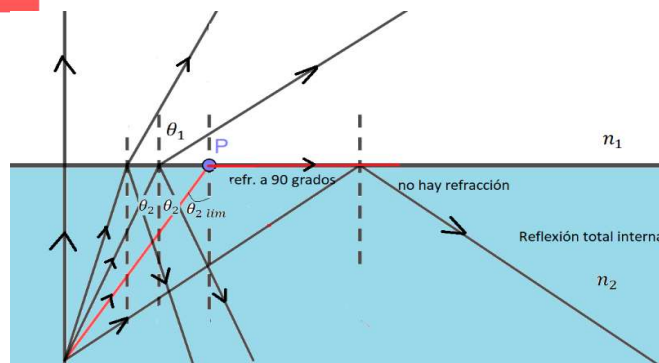


Figura 6. Esquema de la Reflexión total interna y el ángulo crítico

Se deduce que para ángulos de incidencia mayores que  $\theta_{2 \text{ lim}}$ , el  $\sin \theta_1$  debería asumir valores mayores que uno, siendo esto imposible matemáticamente. Desde un punto de vista físico, esto se interpreta considerando que si los rayos de luz inciden con ángulos superiores a  $\theta_{2 \text{ lim}}$ , no existirá refracción. Este fenómeno, denominado reflexión total interna, se utiliza en la propagación de luz en fibras ópticas, donde no se quiere “perder” información por refracción.

### La mecánica cuántica y el enfoque de Feynman aplicados a los fenómenos luminosos

El enfoque de Caminos Múltiples de Feynman (Feynman & Hibs, 1965) es una formulación de la mecánica cuántica cuyo potencial didáctico reside en el uso de un marco vectorial-geométrico para calcular probabilidades.

Nuestra propuesta de enseñanza de la mecánica cuántica se basa en la técnica de la integral de caminos, que llamaremos aquí la suma de todas las alternativas (STA). Existen propuestas para la enseñanza de la mecánica cuántica basadas en el enfoque STA y el uso de herramientas computacionales, como la de (Dowrick, 1997, Arlego, 2008; Taylor et. al. 1998; Ogborn et. al., 2006; Hanc & Tuleja, 2005; Malgieri et. al. 2014, 2015, 2017). En general, estas se enfocan en el comportamiento de la luz y del electrón, mediante simulaciones computacionales.

En trabajos anteriores, implementamos y analizamos secuencias didácticas basadas en el enfoque de Feynman para la mecánica cuántica orientadas a la educación media superior, tanto para el comportamiento de los electrones como de la luz (Fanaro et. al. 2009, 2012, a, b; 2014; Otero & Fanaro, 2020). Además, dichas investigaciones utilizaron el marco teórico de la Teoría de Campos Conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990, 2013).

## El enfoque de Feynman

Destacamos los siguientes conceptos vinculados a la mecánica cuántica (MC) y su validación en general:

Eventos: en MC se consideran eventos. Por ejemplo, en la reflexión de la luz sobre una superficie plana, un evento puede ser que la luz emitida en  $A$  se refleje en el espejo en el punto  $P$  (Figura 2).

Probabilidades: la MC no predice la certeza sino la probabilidad de un evento. Es posible predecir la probabilidad de que la luz emitida en  $A$  se refleje en el punto  $P$  del espejo.

Comparación teoría-experimento: Las predicciones de la teoría se comparan con el experimento de la siguiente manera: si  $P(e)$  es la probabilidad que la teoría predice para la ocurrencia de un evento  $e$ ,  $Ne$  es el número de veces que el evento ocurre en el experimento y  $N$  es el número total de eventos registrados, entonces  $P(e)$  tiende a  $Ne/N$ , a medida que  $N$  crece. En el ejemplo de la Figura. 2,  $e$  puede ser el evento de detección de luz en un punto  $P$  de la superficie, entonces  $Ne$  es el número observado de veces que se detecta luz en ese punto y  $N$  es el número total de detecciones (en toda la superficie).

Existe una diferencia crucial entre el modelo cuántico y el modelo de Fermat (o clásico), en este último sólo hay "un" caso: el del menor tiempo. Sin embargo, en el modelo cuántico hay muchas alternativas y probabilidades para cada una de ellas.

Después de analizar cómo comparar teoría y experimento, se consideran las reglas de la Mecánica Cuántica para calcular  $P(e)$ . Para simplificar, nos restringimos al caso de la luz en el vacío. Consideremos un evento particular  $e$  que es la detección de luz en un punto de una pantalla  $F$  que ha sido emitida desde  $I$ . Para esta situación general, Feynman define un método que aquí se adapta empleando la idea de suma de vectores.

- Múltiples caminos. La figura 7 (a) muestra algunos caminos o alternativas que conectan  $I$  con  $F$ .
- Un vector para cada camino. A cada posible camino que une  $I$  con  $F$  le asociamos un vector cuyo módulo es 1.
- El ángulo  $\theta$  que dicho vector forma con el eje  $x$ , es proporcional al tiempo  $t$  que tarda la luz en recorrer ese camino. La constante de proporcionalidad entre el ángulo y el tiempo es la frecuencia "clásica" de la luz  $\omega$ :

$$\theta = \omega t$$



Desde el punto de vista del modelo,  $\omega$  es una constante que toma distintos valores para cada “tipo” de luz: “roja”, “verde”, etc.

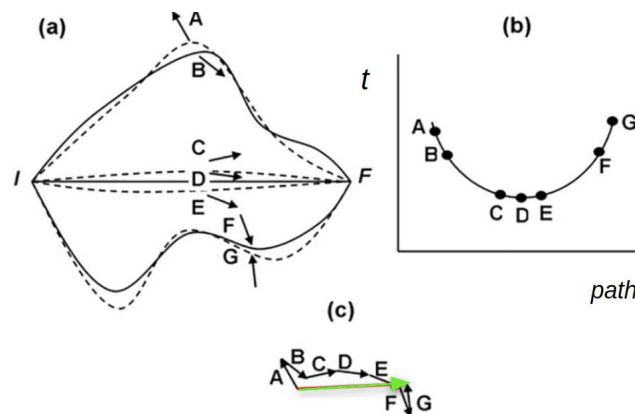


Figura 7. Caminos alternativos que unen I con F (a). El camino más corto (D) y sus alrededores, representados por C y E, tienen aproximadamente la misma longitud (b) y son los que más contribuyen a la suma, indicada en verde en (c). El módulo cuadrado del vector suma en color verde es proporcional a la probabilidad de ir de I a F.

Para un medio homogéneo, el tiempo empleado por la luz es proporcional a la distancia recorrida:  $d = v t$ , donde  $v$  es la velocidad de la luz en ese medio. Esto es práctico y permite el análisis tanto en términos de tiempos como de distancias (como hicimos con el principio de Fermat).

- Suma de las contribuciones de todos los caminos (principio de superposición). Se suman los vectores asociados a todos los caminos posibles que unen I con F. Esto da el vector resultante, como se muestra en verde en la Figura 7 (c).
- Cálculo de probabilidad. El módulo cuadrado del vector resultante es proporcional a la probabilidad del evento considerado. Esto plantea el problema de sumar “infinitos” vectores. Para calcular esta suma aproximadamente, consideremos de nuevo la Figura 7 (a). El camino (D) que está en el centro es el más corto, es decir, una línea recta. Alrededor de él, también hay caminos muy cercanos (C, E) que tienen aproximadamente la misma longitud que la línea recta. Se observa que alrededor del camino más corto (D) los cambios de longitud son tales que los vectores asociados mantienen aproximadamente la misma dirección. Por el contrario, los caminos más alejados, como A, B, F y G en la figura, tienen longitudes completamente arbitrarias, por lo que sus vectores asociados apuntan en direcciones arbitrarias, no relacionadas. La figura 7 (b) muestra esquemáticamente este comportamiento.

Si se pudieran sumar “todos” los caminos posibles, para calcular la probabilidad de detectar en  $F$ , luz emitida en  $I$ , se observaría que las contribuciones de los caminos alejados del más corto tenderían a cancelarse entre sí (estadísticamente). El resultado final sería que sólo la contribución del camino más corto y las de su entorno más cercano contribuyen a la suma final (flecha verde en la figura 10 (c)) y, por lo tanto, a la probabilidad. En este sentido, es posible concluir que el camino más probable para ir de  $I$  a  $F$  es la línea que los une, que es la predicha por el modelo de Fermat. Asumiendo para la luz el punto de vista de las reglas de adición de caminos de la Mecánica Cuántica expuestas anteriormente, a continuación, volvemos a analizar los experimentos de la primera parte.

### La reflexión desde el modelo cuántico: el camino más corto es el más probable

Se seleccionan algunos caminos posibles para calcular la probabilidad de detectar luz en  $P$  que se emite en  $S$  y se refleja en el espejo como se muestra en la Figura 8 (a).

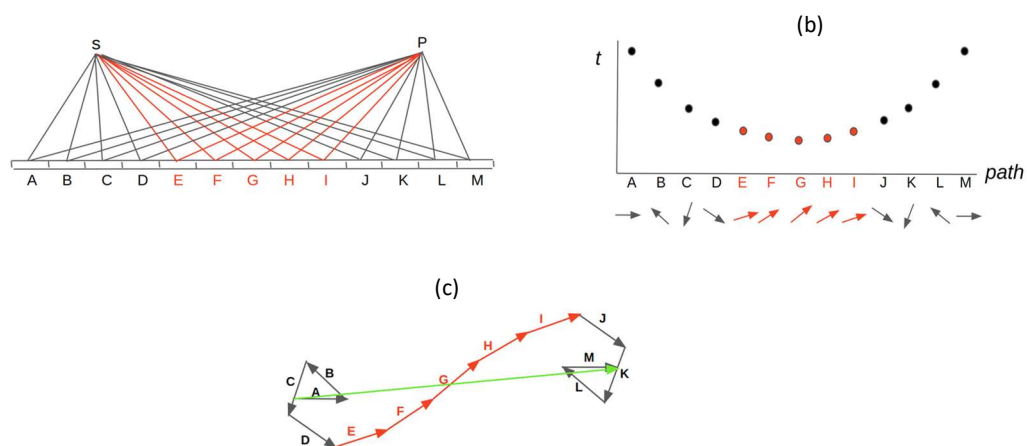


Figura 8. Posibles caminos que unen el punto de detección de la luz  $P$  con el punto de emisión  $S$ , reflejándose en el espejo (a). El camino más corto (menor en tiempo) es  $G$ . Los vectores que más contribuyen a la suma corresponden a los caminos más cercanos al camino más corto y se indican en rojo (b). El módulo cuadrado del vector resultante (indicado en verde) es proporcional a la probabilidad de detectar en  $P$  luz emitida en  $S$  y reflejada en el espejo (c).

Como hemos visto, alrededor del camino más corto  $G$  (reflexión clásica) los cambios de longitud son tales que los vectores asociados mantienen aproximadamente la misma dirección. Sin embargo, alrededor de los caminos alejados de  $G$ , las variaciones son mayores (Figura 8 (b)). Al realizar la suma, los vectores correspondientes a los caminos más alejados

del camino más corto para la luz y con menor tiempo se anulan y no contribuyen a la suma, mientras que el camino clásico mínimo y sus alrededores tienen vectores asociados de longitud similar, y entonces sí contribuyen a la suma (Figura 8 (c)).

En consecuencia, desde el punto de vista cuántico, todos los sucesos son posibles, pero el caso en que el ángulo de incidencia y reflexión son iguales, que es el camino más corto, es el más probable y el que se detecta con mayor facilidad. Experimentos muy controlados muestran detección de luz en puntos que no satisfacen la ley de reflexión clásica, lo que indica que es una ley macroscópica “aproximada”.

### La refracción desde el modelo cuántico.

Anteriormente empleamos el Principio de Fermat para tratar la refracción clásica: si la luz viaja de un medio a otro, su trayectoria cambia de acuerdo a la ley de Snell. Desde un punto de vista cuántico, debemos analizar las probabilidades de eventos de detección de luz como se muestra en la Figura 9 (a) y usar el método de Feynman. Alrededor del camino de tiempo mínimo, que en este caso no es el más corto, porque hay un cambio de medio, las variaciones temporales son tales que los vectores asociados mantienen aproximadamente la misma dirección (Figura 9 (b)). Por otro lado, alrededor de los caminos alejados del camino de menor tiempo, los cambios son mayores. Entonces, al realizar la suma, los caminos alejados del camino de tiempo mínimo para la luz se cancelan y no contribuyen a la suma, mientras que el camino de menor tiempo y sus alrededores son los que más contribuyen (Figura 9 (c)).

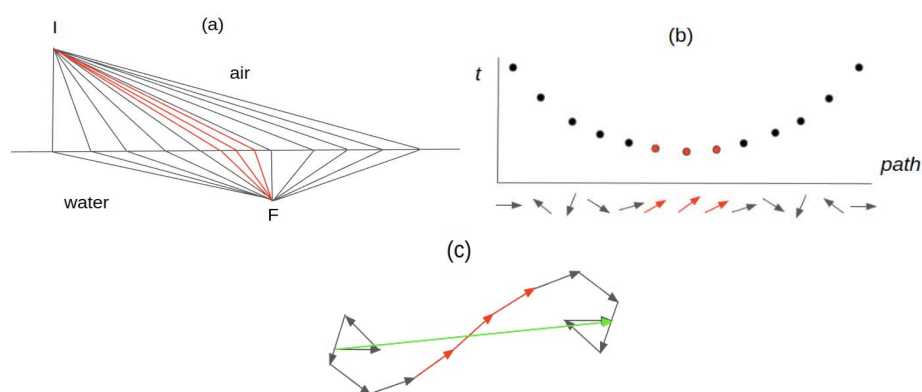


Figura 9. (a) Posibles caminos que conectan el punto de detección de luz F con el punto de emisión Y, habiendo pasado del aire al agua. (b) El camino más corto está en el vértice de la parábola. (c) Los vectores que contribuyen a la suma son aquellos que corresponden a los caminos cercanos al camino de menor tiempo.

Nótese que, desde el punto de vista cuántico, todos los sucesos son posibles, aunque el camino del tiempo mínimo es el más probable. Como en la reflexión, si se realizara un experimento extremadamente cuidadoso, podría detectarse luz en otros puntos que no "cumplan" con la ley de la refracción clásica.

### La Experiencia de la Doble Rendija desde el enfoque de Feynman.

Analicemos el experimento de la doble rendija (EDR) desde el punto de vista de la suma de caminos de la mecánica cuántica. La Figura 10 esquematiza dicho experimento, que puede realizarse de forma simple en laboratorio. La luz proveniente de un láser incide desde la izquierda sobre una pantalla con dos ranuras muy delgadas, separadas una distancia  $d$ . Como resultado de esto, en una segunda pantalla ubicada a una distancia  $D \gg d$ , se observa un patrón de franjas alternadas, indicadas esquemáticamente a la derecha de dicha figura.

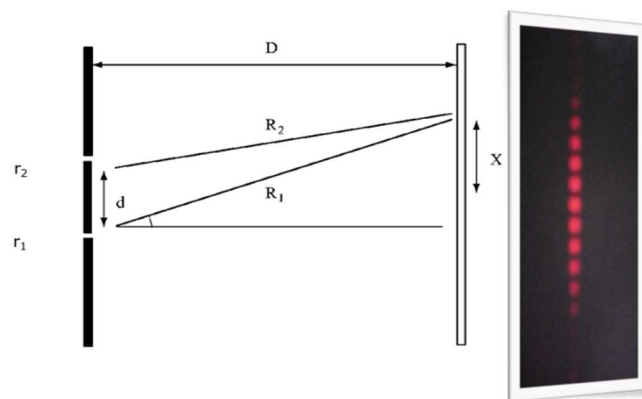


Figura 10: Esquema del experimento de la doble rendija, indicando los dos caminos principales  $R_{1,2}$  que se utilizan en el método de la suma de caminos de la Mecánica Cuántica, y resultado experimental correspondiente (ver texto para más detalles).

El patrón de franjas alternadas, no admite una descripción en términos de rayos, es decir, el principio de Fermat no da cuenta del fenómeno. La descripción "clásica" de este comportamiento en términos ondulatorios, considera a la luz como una onda electromagnética y aplica superposición de ondas. En los lugares donde las ondas llegan en fase se "interfieren" constructivamente y donde llegan en contrafase se anulan. Esto produce el patrón observado sobre la pantalla, que se distribuye como un continuo de intensidades que alternan entre máximos y mínimos. Este procedimiento es habitual en los libros de texto, pero no lo adoptamos

aquí, porque requiere de una introducción al electromagnetismo de Maxwell, que evitamos en este trabajo.

Por otro lado, la Figura 11 muestra imágenes de la formación de patrones en la pantalla de detección, en tiempos crecientes, de izquierda a derecha, utilizando luz de muy baja intensidad. Se observa que el patrón no es continuo, y que la luz se detecta en la pantalla como eventos discretos (puntos).

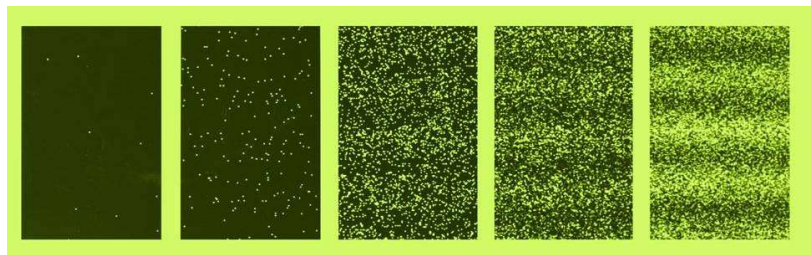


Figura 11. Secuencia experimental de imágenes que muestra la pantalla de detección en tiempos crecientes en el experimento de doble rendija, realizado con luz de intensidad muy baja. Los puntos inicialmente dispersos en los paneles de la izquierda representan eventos de detección de luz individuales que parecen aleatorios. Sin embargo, a medida que avanza el tiempo de exposición, las imágenes muestran una distribución granular de franjas alternas de máximos y mínimos, como se muestra en los paneles de la derecha.

Al principio, como se aprecia en los paneles de la izquierda, los eventos de detección no muestran un patrón definido y parecen distribuirse aleatoriamente. Pero a medida que aumenta el tiempo de exposición y se detectan más eventos, comienza a surgir una regularidad (panel central de la Figura 11). Cuantos más eventos se detectan, más definido está el patrón de franjas alternadas (panel derecho de la Figura 11). En el límite de un tiempo de exposición largo, esta granularidad se "pierde" y se fusiona en un continuo, que es lo que observamos en la Figura 10. Las figuras 10 y 11 muestran dos caras del fenómeno de interferencia. La primera lo hace en un contexto "clásico" donde no hay granularidad. El electromagnetismo clásico describe apropiadamente esta distribución continua de intensidad en la pantalla. Por otro lado, la figura 11 muestra el "detalle" de la formación de dicho patrón empleando luz de muy baja intensidad para evidenciar el proceso de formación del mismo. En este contexto, el carácter discreto "cuántico" de los eventos de detección es central y la formación del patrón exhibe un carácter estadístico.

Como ya se mencionó, aquí evitamos tratar la interferencia en términos del electromagnetismo clásico y directamente, describimos el fenómeno desde el punto de vista

cuántico. Esto es ventajoso porque describe el fenómeno en todas las escalas, con las figuras 10 y 11 como casos extremos. Además, se evita incursionar en el electromagnetismo clásico, que sólo da cuenta de la parte "clásica" del fenómeno.

Para aplicar el método de Feynman a la interferencia, se considera la Figura 10 y se calcula la probabilidad de detección en un punto dado en la pantalla. Nótese que el enfoque cuántico incorpora el carácter discreto de los eventos de detección mostrados en la formación del patrón en la Figura 11. A diferencia del modelo clásico, que considera la distribución de intensidad, el modelo cuántico describe una distribución de probabilidad. Ambos conceptos son "proporcionales", aunque conviene aclarar que pertenecen a modelos diferentes.

Empecemos calculando la suma de los vectores asociados a todos los caminos que van desde la fuente hasta un punto de la pantalla. Existen dos caminos directos que unen la fuente con un punto  $x$  dado de la pantalla, como se muestra en la Figura 10. Uno es el que va desde la fuente pasando por la rendija inferior, y el otro, pasa por la rendija superior. Hay múltiples alternativas posibles, por ejemplo, pasar por una de las rendijas y tomar un camino completamente arbitrario hasta llegar a la pantalla. Sin embargo, según el análisis anterior sabemos que el camino más corto y sus alrededores son los más importantes. Entonces, para calcular la probabilidad solo se toman las contribuciones de los dos caminos principales (incluso despreciando la vecindad de cada uno). Nótese la diferencia en la aplicación de la técnica con respecto a casos anteriores de reflexión cuántica, por ejemplo. Aunque siempre (excepto en el centro) un camino directo es más corto que el otro, dependiendo de  $x$ , aquí se necesitan los dos caminos principales para capturar la interferencia desde el punto de vista cuántico. Por cierto, este es un ejemplo concreto de superposición cuántica.

Ahora, analicemos las condiciones en las que se encuentra un máximo en un punto de la pantalla. Según las reglas de la mecánica cuántica, los vectores asociados a los dos caminos principales que van desde cada rendija hasta ese punto deben apuntar en la misma dirección. Un caso en el que esto ocurrirá es en el centro de la pantalla, ya que las distancias de las rendijas al centro de la pantalla son iguales y entonces sus vectores asociados tienen el mismo ángulo, por lo que su suma, y por tanto la probabilidad, es máxima. Es decir que, la teoría predice un máximo en el centro de la pantalla y esto se observa experimentalmente. Sin embargo, también hay otros máximos, por ejemplo, cuando en la diferencia de caminos, el vector da un número entero de ciclos. La misma estrategia se puede seguir para detectar los mínimos en la pantalla.

Cualquier parecido con la matemática clásica de la interferencia no es casual. Sin embargo, aquí estamos tratando con el modelo puramente cuántico.

Para obtener la expresión de la probabilidad en función de la distancia a la pantalla (no sólo máximos y mínimos) procedemos de la siguiente manera. Consideramos los dos vectores unitarios asociados a los dos caminos principales ( $R_1$  y  $R_2$  en la Figura 13), cuyos ángulos son proporcionales al tiempo que tarda la luz en cada caso. Luego sumamos ambos vectores y calculamos el módulo cuadrado del vector suma.

El cálculo de la probabilidad se puede realizar considerando el vector unitario cuyo ángulo es proporcional al tiempo mínimo (o la distancia más corta), para cada rendija respectivamente, y finalmente elevando la suma al cuadrado.

Para la primera rendija el vector asociado  $V_1$  es:

$$V_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$$

en la cual  $\theta_1 = \omega t_1 = \omega R_1/v = k R_1$ , es decir podemos expresar el ángulo en función de tiempos o distancias cambiando la constante de proporcionalidad de  $\omega$  a  $k = \omega / v$ , donde  $v$  es la velocidad de la luz en el medio, respectivamente.

Del mismo modo, la contribución principal para la otra rendija es:

$$V_2 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$$

Por lo tanto, el vector resultante es:

$$V_R = V_1 + V_2 = (\cos \theta_1 + \cos \theta_2, \sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

cuyo módulo cuadrado  $|V_R|^2$  es proporcional a la Probabilidad  $P(x)$  de detectar luz en un punto  $x$  sobre la pantalla (Fig. 14). Calculando dicho módulo (lo cual es directo y lo omitimos) obtenemos:

$$P(x) \propto \cos^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)$$

donde la constante de proporcionalidad es irrelevante aquí. La fórmula anterior se puede expresar en términos de distancias utilizando  $\theta_{1,2} = k R_{1,2}$

Luego, reemplazando esta expresión en  $P(x)$  se obtiene:

$$P(x) \propto \cos^2 \left( k \frac{R_1 - R_2}{2} \right)$$



La diferencia de trayectorias  $R_1 - R_2$  se puede expresar en función de la separación entre las rendijas  $d$  y la distancia entre la pantalla y la pared  $D$ , siendo  $D \gg d$ , comparando triángulos semejantes en la Figura 10 tenemos que:

$$R_1 - R_2 = \frac{x}{D} d$$

Reemplazando esta expresión en  $P(x)$  obtenemos<sup>5</sup>:

$$P(x) \propto \cos^2\left(\frac{kd}{2D} x\right)$$

Esta es la expresión para la probabilidad de detectar luz a una distancia  $x$  del centro de la pantalla, que se deriva de la mecánica cuántica, y permite predecir no sólo los máximos y mínimos sino todos los valores intermedios de probabilidad. La fórmula también permite analizar la dependencia de la probabilidad con el color de la luz, que inicialmente estaba fijado; es decir, aumentar o disminuir el valor de  $k$ , dejando los demás parámetros ( $d$  y  $D$ ) constantes. Otra posibilidad sería fijar el color y realizar el experimento variando la separación de las rendijas, y analizar la dependencia de la probabilidad con esta separación. Así, trabajar con los parámetros de la expresión puede ser didácticamente muy enriquecedor, no sólo para el aspecto cuántico relacionado con la probabilidad, sino también porque permite comprobar los límites de validez de la óptica ondulatoria.

### **Secuencia didáctica para la enseñanza de la óptica a partir del principio de Fermat y su generalización cuántica**

En esta sección presentamos una secuencia didáctica para enseñar óptica a estudiantes de secundaria, basada en el principio de Fermat y la generalización cuántica de Feynman. El objetivo es introducir conceptos fundamentales sobre la luz desde un enfoque unificado de la mecánica cuántica, utilizando la técnica de integrales de camino propuesta por Feynman.

---

<sup>5</sup> En sentido estricto, esta expresión no representa una probabilidad porque no es normalizable, es decir, la suma de todas las probabilidades de detectar luz en cualquier parte de la pantalla no es 1, sino que diverge. Se interpreta como una probabilidad que "oscila" entre 0 y un valor máximo relativo de probabilidad de encontrar luz. Tampoco es una probabilidad puntual, sino una densidad de probabilidad, es decir, da la probabilidad de detectar luz entre  $x$  y  $x+dx$ , aunque aquí seguimos hablando de probabilidad, dejando este tecnicismo de lado.



En el análisis previo explicamos que gracias a la generalización del principio de Fermat y su extensión cuántica aun los fenómenos de interferencia y difracción, pueden explicarse sin profundizar en la óptica ondulatoria clásica. Nos proponemos extender las versiones previas de nuestra secuencia incluyendo experiencias adicionales de reflexión, refracción y reflexión interna total.

Para analizar el tiempo de trayecto de la luz y el principio de Fermat en los experimentos mencionados empleamos simulaciones basadas en una matemática accesible a los estudiantes de secundaria. La secuencia didáctica tiene las siguientes tres fases:

Fase 1: Introducción al principio de Fermat (situaciones 1-4).

Situación 1: Reflexión de la luz con un puntero láser y espejo. El principio de Fermat se aplica para obtener la ley de Snell-Descartes.

Situación 2: Refracción de la luz al pasar de aire a líquido. Se aplica el principio de Fermat para obtener la ley de refracción y se emplean simulaciones interactivas.

Situación 3: Experimento de doble rendija con un puntero láser y una placa metálica. Se observan los patrones de interferencia, identificando zonas de luz y oscuridad en la pantalla.

Situación 4: Se analizan imágenes de patrones de interferencia cuando la luz forma un patrón discreto.

Fase 2: Introducción al modelo cuántico de la luz y la "Suma de Todas las Alternativas" (STA) (situaciones 5-6).

Situación 5: Se introducen los conceptos cuánticos fundamentales, como eventos y probabilidad, y se enseña el método de cálculo de amplitud de probabilidad mediante la suma de caminos alternativos, utilizando vectores y ángulos.

Situación 6: Cálculo de amplitudes de probabilidad mediante la suma gráfica de vectores en GeoGebra y python. Los estudiantes observan que solo los caminos cercanos al camino de menor tiempo contribuyen a la probabilidad.

Fase 3: Aplicación de la técnica STA (situaciones 7-9).

Situación 7: Reflexión utilizando la técnica STA, con una simulación en GeoGebra y python, donde los estudiantes seleccionan caminos alternativos y observan los ángulos de los vectores.

Situaciones 8-9: Aplicación de la STA a la refracción y la reflexión total interna.

Fase 4: Aplicación de la STA al experimento de la doble rendija (situaciones 10-11).

Situación 10: Cálculo de la probabilidad de detección en función de las variables del experimento de la doble rendija.

Situación 11: Interpretación de los resultados experimentales desde la teoría cuántica, relacionando los máximos y mínimos de probabilidad con las detecciones individuales observadas.

La evaluación se realiza a través de la actividad que los estudiantes llevan a cabo en cada etapa. Esta propuesta fortalece nuestra visión de una enseñanza amplia de la óptica, basada en el principio de tiempo mínimo y su generalización cuántica

### **Consideraciones finales**

En este trabajo hemos analizado diversos aspectos de la luz desde un enfoque unificado y no tradicional, que adapta y contextualiza las integrales de camino de Feynman con el fin de explicar fenómenos ópticos. Este enfoque presenta varias ventajas clave:

Eliminación de la confusión sobre el concepto de fotón: A diferencia de muchos libros de texto tradicionales, que introducen de manera confusa el concepto de fotón, nuestra propuesta evita imponer a los estudiantes principios cuánticos complejos. En su lugar, desarrollamos un mecanismo explicativo que aborda los aspectos fundamentales de la Mecánica Cuántica, tales como la descripción probabilística, la noción de suceso, probabilidad y superposición, utilizando herramientas matemáticas elementales. Esto resulta particularmente útil, dado que en los primeros niveles educativos no se dispone de un repertorio amplio de conceptos físicos o matemáticos.

Aplicación directa a la luz monocromática, especialmente láseres: El enfoque se aplica a la luz monocromática de cualquier tipo, en particular a los láseres, que son fácilmente accesibles para los estudiantes. Se utilizan operaciones matemáticas simples, como la suma y el módulo de vectores, lo que permite una comprensión intuitiva de los fenómenos sin recurrir a formalismos complejos.

Visualización computacional de los resultados: A pesar del nivel matemático complejo que implica su implementación técnica, la comprensión de la idea central y los resultados derivados de las integrales de camino pueden visualizarse mediante herramientas informáticas de simulación de uso libre. Estas herramientas sustituyen el enfoque analítico tradicional por un marco geométrico, permitiendo a los estudiantes visualizar el proceso de adición de caminos.

Conexión de conceptos distantes: Un aspecto fundamental de este enfoque es que conecta dos áreas que la enseñanza tradicional tiende a separar: el principio de mínimo tiempo de Fermat y la electrodinámica cuántica de Feynman. En la enseñanza habitual, la óptica geométrica se aborda inicialmente, describiendo la propagación rectilínea de la luz, reflexión y refracción, sin entrar en el principio variacional de Fermat, que suele mencionarse sólo de manera tangencial. Aunque se utilizan modelos ondulatorios para explicar fenómenos como interferencia y difracción, esto requiere del electromagnetismo clásico, que no está al alcance de los estudiantes en niveles secundarios o incluso universitarios iniciales debido a la complejidad de las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, este modelo clásico de Maxwell no puede explicar fenómenos como la granularidad observada en el patrón de interferencia del experimento de la doble rendija, que muestra la discretitud inherente de la luz. Este es un ejemplo claro de fenómenos cuánticos que escapan al modelo clásico.

Para abordar estos fenómenos, se recurre a la mecánica cuántica. La luz, en este contexto, se trata como un campo electromagnético cuantizado, que da lugar al concepto de fotón. Esta versión de la óptica cuántica describe el fenómeno de la granularidad en la interferencia.

Este largo recorrido explica por qué las nociones de la física moderna no se enseñan de manera sistemática en la escuela secundaria. Sin embargo, nuestra propuesta permite abordar cualitativamente una amplia gama de fenómenos, desde la propagación rectilínea siguiendo el principio de tiempo mínimo de Fermat, hasta la granularidad de los fenómenos cuánticos.

La adaptación del enfoque de integrales de camino de Feynman, junto con las transformaciones didácticas diseñadas cuidadosamente a lo largo de los años, ofrece una forma adecuada y satisfactoria de comunicar estos conceptos complejos de manera accesible. Este marco no requiere el uso de la óptica ondulatoria clásica para describir fenómenos como la interferencia. En cambio, partimos de un punto de vista cuántico desde el principio, utilizando el principio de tiempo mínimo y su extensión a los múltiples caminos de Feynman. De este modo, es posible abordar estos fenómenos de manera general, sin necesidad de sofisticados modelos ondulatorios.

Esta propuesta didáctica une dos mundos, dos eras del conocimiento, y conecta las visiones de Fermat y Feynman en un marco coherente y accesible. Como hemos mostrado en los ejemplos, es posible abordar una amplia variedad de fenómenos, desde la óptica básica de

dispositivos como lupas y lentes, hasta los complejos patrones de interferencia cuántica, utilizando una matemática accesible tanto en niveles de educación secundaria como universitaria inicial.

### Referencias

ALVARADO PUENTES, K. A. **Enseñanza y aprendizaje de aspectos fundamentales de Física Cuántica en la escuela secundaria colombiana a partir del enfoque de Feynman** (Tesis de doctorado). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina, 2020. <https://doi.org/10.52278/2899>

AUTHOR. Los fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela secundaria utilizando el concepto de integral de camino. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3(1), p. 59-66, 2008.

AUTHOR.; FANARO, M. A. Emotions, Feelings and Conceptualizations in Physics Didactic. In *Science Education Research in South and Latin America*. El-Hani, CH., Fleury Mortimer, E., Pietroccola, M. & Otero, M. R., Science Publisher (Brill): p. 113 - 156. The Netherlands, 2020,

DOWRICK, N. J. Feynman's sum-over-histories in elementary quantum mechanics. *European Journal of Physics*, 18, p. 75–78, 1997.

ELGUE, M. **Enseñanza y aprendizaje de aspectos fundamentales de física cuántica en la escuela secundaria a partir del estudio de la luz.** (Tesis de doctorado). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina, 2015.

FANARO M., AUTHOR Y AUTHOR The double slit experience with light from the point of view of Feynman's sum of multiple paths. *Rev. Bras. Ensino Fís.* 36(2), p. 1–7, 2014.

FANARO, M., AUTHOR Y AUTHOR A Didactic Proposed for Teaching the Concepts of Electrons and Light in Secondary School Using Feynman's Path Sum Method. *European Journal of Physics Education*, 3(2), p. 1–11, 2012.

FANARO, M., AUTHOR Y AUTHOR A proposal to teach the light at secondary school from the Feynman method. *Problems of Education in the 21st Century*, 47(47), p. 27–39, 2012.

FANARO, M., AUTHOR Y AUTHOR Teaching Basic Quantum Mechanics in Secondary School Using Concepts of Feynman's Path Integrals Method. *The Physics Teacher*, 50, p. 156–158, 2012.

FANARO, M., AUTHOR Y AUTHOR Teaching the foundations of quantum mechanics in secondary school: a proposed conceptual structure. *Investigações em Ensino de Ciências*, 14(1), p. 37–64, 2009.



FEYNMAN, R. QED the strange theory of light and matter; Penguin Books– Princeton University Press: Princeton, USA, 1985.

FEYNMAN, R.; HIBBS, A. Quantum Mechanics and Path Integrals; McGraw-Hill, Inc: New York, USA, 1965.

GIERE, R. N. How Models Are Used to Represented Reality. *Philosophy of science*, 71(5), p. 742-752, 2004. <https://doi.org/10.1086/425063>

GIERE, R. N. Science without laws. Chicago: University of Chicago Press, Chicago, USA, 1999.

GONZÁLEZ, E.M., MUÑOZ BURBANO, Z.E. Y SOLBES, J. La enseñanza de la física cuántica: una comparativa de tres países. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 15(2), p. 239-250, 2020. DOI: <http://doi.org/10.14483/23464712.15619>

HANC, J.; TULEJA, S. The Feynman quantum mechanics with the help of Java applets and physlets in Slovakia. *Proceedings of the 10th Workshop on Multimedia in Physics Teaching and Learning: Freie Universität Berlin, Germany*, 2005.

MALGIERI, M., ONORATO, P. Y DE AMBROSIS, A. Teaching quantum physics by the sum over paths approach and GeoGebra simulations. *European Journal of Physics*, 2014, 35, 055024 (21p.).

MALGIERI, M., ONORATO, P. Y DE AMBROSIS, A. Test on the effectiveness of the sum over paths approach in favoring the construction of an integrated knowledge of quantum physics in high school. *PhysRevPhysEducRes*, 2017, 13, 01010113. DOI: <https://doi.org/10.1103/>

MALGIERI, M., ONORATO, P. Y DE AMBROSIS, A. What is Light? From Optics to Quantum Physics Through the Sum over Paths Approach. *Teaching/Learning Physics Integrating research into practice GIREP–MPTL 2014 Conference Proceedings: UNIPA*, p. 639–646, Palermo, Italy, 2015.

Author & Author Teaching and Learning Optics in High School: From Fermat to Feynman. *Educ. Sci.* 13(5), 503, 2023. <https://doi.org/10.3390/educsci13050503>

OGBORN, J., HANC, J. Y TAYLOR, E. A First Introduction to Quantum Behavior. *Proceedings of the GIREP Conference 2006, Modelling in Physics and Physics Education. AMSTEL Institute: Amsterdam, Denmark*, 2006, p. 213.

PERALES PALACIOS, J. Enseñanza de la óptica. *Revista Alambique*, 1, 133-138, 1994.

RAVANIS, K.; BOILEVIN, J.-M. A comparative approach to the representation of light for five- eight- and ten-year-old children: educational perspectives. *Journ. of Balt. Scien. Educ.*, 8(3), 182-190, 2009.



RAVANIS, K.; CHRISTIDOU, V.; HATZINIKITA, V. Enhancing conceptual change in preschool children's representations of light: a socio-cognitive approach. *Res. in Scien. Educ.*, 43(6), 2257-2276, 2013.

TAYLOR, E., STAMATIS VOKOS, J., O'MEARA, M.Y THORNBUR, N. Teaching Feynman's Sum Over Paths. *Quantum Theory. Computers in Physics*, 1998, 12, 190–199.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, (2/3), 133-170, 1990.