



**Enseñanza por investigación en la universidad: relaciones entre los gestos didácticos esenciales**

**Ensino por pesquisa na universidade: relações entre os gestos didáticos essenciais**

**Teaching by investigation at university level: relationship between the essential didactical gestures**

1

Diana Patricia Salgado<sup>1</sup>

María Rita Otero<sup>2</sup>

**Resumen:** Este trabajo analiza un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) desarrollado en el nivel universitario, mediante gestos didácticos presentes en la clase. El REI estudia una pregunta que involucra la matemática y la economía. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) ha desarrollado la noción de REI y de dialécticas, entendidas como gestos característicos del estudio y la investigación. Se analiza el funcionamiento de las dialécticas usando técnicas de análisis estadístico multivariado. Se identifica el funcionamiento simultáneo de ellas, tales como la del estudio e investigación, la de la lectura y escritura y la del entrar y salir del tema. Se detectan dificultades en la gestión del medio didáctico, debidas a problemas en la incorporación del REI en el aula.

**Palabras-clave:** Universidad. Teoría antropológica de lo didáctico. Recorrido de estudio e investigación. Dialécticas. Análisis estadístico multivariado.

**Resumo:** Este trabalho analisa o desenvolvimento de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) realizado no nível universitário, mediante gestos didáticos presentes na classe. O REI estuda uma questão que envolve matemática e economia. A Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolveu a noção de PEP e de dialética, entendidas como gestos didáticos característicos do estudo e pesquisa. O funcionamento das dialéticas é analisado mediante técnicas de análise estatística multivariada. Identifica-se o seu funcionamento simultâneo, tais como a do estudo e pesquisa, a da leitura e escrita e a do entrar e sair do tema. Detectam-se dificuldades relacionadas com a gestão do meio didático, devidas aos problemas na incorporação do PEP na sala de aula.

**Palavras-chave:** Universidade. Teoria antropológica do didático. Percurso de estudo e pesquisa. Dialética. Análise estatística multivariada.

**Abstract:** This work analyses the development of a Research and Study Path (RSP) carried out at university level, by the didactical gestures present in class. The RSP studies a question related to mathematics and economy. The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) has developed the notions of RSP and dialectics, characteristic didactical gestures in a study and research. The functioning of the dialectics is analyzed using multivariate statistical analysis techniques. Their simultaneous functioning, such as that of the study and research, the reading and the writing and the going in and out of the theme, are identified. Difficulties related to the didactical environment management, caused by the incorporation problem of the RSP at the class, are detected.

**Keywords:** University. Anthropological theory of the didactic. Study and research path. Dialectics. Multivariate statistical analysis.

**Submetido 04/10/2023**

**Aceito 18/12/2023**

**Publicado 03/01/2024**

<sup>1</sup> Doctora en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática. Universidad Nacional del Sur. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5130-3624>. E-mail: [dsalgado@uns.edu.ar](mailto:dsalgado@uns.edu.ar).

<sup>2</sup> Doctora en Enseñanza de las Ciencias. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, NIECYT, CONICET. <https://orcid.org/0000-0002-1682-9142>. Email: [rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar](mailto:rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar).

## Introducción

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (CHEVALLARD, 2013) propone los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) como una forma de enfrentar el fenómeno actual de la “visita de obras” en los sistemas de enseñanza de todos los niveles educativos, incluido el universitario. Aunque el constructo REI se encuentra en la etapa de experimentación, podría ser considerado como dispositivo didáctico capaz de superar el fenómeno mencionado, ya que su objetivo es enseñar a partir de la investigación y del cuestionamiento del mundo. La puesta en marcha de un REI dentro del aula demanda realizar ciertos gestos didácticos que, en la TAD, se denominan dialécticas.

En el nivel universitario, se han realizado investigaciones que desarrollan REI (Barquero; Bosch; Gascón, 2013; Barquero Farrás; Ruiz-Munzón, Monreal Galán; Barajas, 2016; Costa; Arlego; Otero, 2014; Espinoza Melo; Sánchez Soto, 2017; Fonseca; Casas; Insua, 2011; Oliveira Lucas, 2015) pero muy pocas que consideren a las dialécticas como instrumento de análisis (Gazzola; Otero; Llanos, 2019, 2020; Parra; Otero, 2017, 2018; Salgado, 2019; Salgado; Otero, 2020), que establezcan relaciones entre ellas o que permitan identificar cuáles son las dialécticas que poseen un mayor o menor grado de funcionamiento.

Este trabajo presenta resultados de dos implementaciones de un REI codisciplinar a la matemática y a la economía (Salgado; Otero, 2020; Salgado, 2019), en cursos regulares de matemática de nivel universitario. EL REI se origina con la pregunta ¿cómo calcular los costos en un microemprendimiento? Particularmente en este trabajo, el objetivo es analizar posibles relaciones entre las dialécticas que surgen en el desarrollo del REI, considerándolas en conjunto. En tal sentido, las técnicas de análisis estadístico multivariado y el análisis de clúster, resultan particularmente útiles.

## Los gestos didácticos en un REI

Un recorrido de estudio e investigación (REI) es un dispositivo didáctico que se caracteriza por la introducción en la clase de una pregunta Q, llamada pregunta generatriz, para la cual, la clase elabora, fundamenta, valida y difunde, una respuesta posible. En este proceso de estudio de la pregunta, se ponen en juego ciertas acciones didácticas, denominadas dialécticas (Chevallard, 2007; Salgado, 2019; Salgado; Otero, 2020). En nuestro caso el REI

comienza con la pregunta:  $Q_0$ : ¿cómo calcular los costos en un microemprendimiento?  $Q_0$  es una pregunta generadora de múltiples preguntas nuevas, que convocan al estudio e investigación de saberes relacionados con la matemática y con la economía. En este caso, la respuesta puede encontrarse adoptando un modelo numérico o bien otro, algebraico funcional. Considerando este último, la búsqueda de respuestas a las preguntas derivadas conduciría al estudio de conceptos matemáticos referidos al cálculo diferencial en dos variables. El modelo tomado como referencia, previamente a la implementación del recorrido, ha sido desarrollado en detalle en Salgado, Otero y Parra (2019).

La cadena de preguntas y respuestas (dialéctica de las preguntas y respuestas) que genera el estudio de  $Q$  provocan la investigación y el estudio de los saberes involucrados (dialéctica del estudio y la investigación), pertenecientes a una o más disciplinas. Las respuestas posibles a las preguntas de la cadena antes mencionada son evaluadas a partir de su utilidad para el desarrollo del estudio, y en caso afirmativo, son incorporadas al medio didáctico para su deconstrucción y validación por la comunidad de estudio (dialéctica de la conjetura y de la prueba o del medio-media). A su vez, cuando se introduce un saber al medio didáctico, se pone en marcha un proceso de análisis y síntesis sobre las características y origen de ese saber, cuya finalidad es decidir qué, cómo y cuánto estudiar (dialéctica del análisis (praxeológico y didáctico) y de la síntesis (praxeológica y didáctica)). La elaboración de una respuesta puede remitir a una disciplina o incluso, inspeccionar en otros campos para luego retomar el estudio inicial (dialéctica del entrar y salir del tema). Además, es preciso inspeccionar, de manera panorámica, grandes áreas del saber para responder las preguntas o para encontrar los saberes claves que servirán para responderlas (dialéctica del paracaidista y de las trufas). La acción de determinar cuáles son los saberes pertinentes y dejar de lado aquellos que no son útiles para resolver el problema se denomina dialéctica de las cajas negras y cajas claras. Además, en un REI, se realiza un reparto de responsabilidades, entre individuos o grupos de ellos, que realizan diferentes tareas para contribuir a la respuesta final (dialéctica del individuo y del colectivo). Como en todo estudio e investigación es necesario tomar la información desde los diversos sistemas en los que ésta se encuentra y utilizarla adecuadamente para elaborar las respuestas, tanto en forma escrita como oral (dialéctica de la lectura y de la escritura). Finalmente, la

respuesta debe ser difundida, es decir comunicada a la comunidad de estudio (dialéctica de la difusión y recepción).

## Preguntas de la investigación

En este trabajo se abordan las siguientes cuestiones:

- En el REI desarrollado, ¿cómo se relacionan entre sí las dialécticas?, ¿cuáles funcionan conjuntamente y cuáles no lo hacen?
- El funcionamiento de las dialécticas, ¿permite calificar al REI desarrollado como genuinamente codisciplinar?

## Metodología

### *Contexto y características de las implementaciones*

El recorrido se implementó en dos oportunidades, en los años 2014 y 2015, en cursos universitarios de matemática de las carreras: Licenciatura en Administración de Empresas, Contador Público y Licenciatura en Economía. Participaron en total N=73 estudiantes. La universidad de referencia posee una estructura departamental, por lo que, por ejemplo, cada cátedra de matemática está a cargo pura y exclusivamente del Departamento de Matemática, lo cual condiciona la realización de actividades codisciplinarias entendiéndose que en una clase de matemática sólo se debe estudiar matemática.

En este contexto, considerando que la matemática a enseñar está dirigida a futuros economistas o administradores de empresa, se enfatiza el desafío y la importancia del estudio conjunto de ambas disciplinas, matemática y economía. La implementación del REI provocó grandes cambios en la organización de la enseñanza y en la clase. Las características generales de ambos recorridos son:

- Las implementaciones se llevaron a cabo, no en talleres especiales, sino en clases y horarios habituales, del primer año de las carreras mencionadas.
- El profesor introdujo la pregunta generatriz  $Q_0$ .
- Los estudiantes se distribuyeron optativamente en grupos de tres o cuatro integrantes.
- Los grupos trabajaron para encontrar una posible respuesta a  $Q_0$ .

- Los diferentes sistemas de información disponibles fueron: Internet, libros de matemática, apuntes de profesores de otros cursos y años, la biblioteca de la institución, el profesor, etc.
- Periódicamente, cada vez que hubo un avance en el estudio de respuestas, se realizó una exposición grupal referida a la evolución del estudio realizado.
- Al finalizar cada sesión, los estudiantes entregaron su trabajo individual al profesor, en formato digital o papel. Al finalizar el REI, los mismos hicieron entrega del trabajo grupal.

### ***Recolección de los registros***

En las dos implementaciones se registraron:

- Protocolos de los estudiantes: Estos protocolos fueron escaneados por el profesor y devueltos la clase siguiente. Los grupos compartieron y discutieron sus contribuciones con la clase y presentaron informes escritos periódicamente.
- Notas de campo del profesor: El profesor-investigador, quien realizó observación participante y fue el responsable de la investigación, llevó un registro de notas de campo que le permitió obtener un “diario” del grupo de clase. En estas anotaciones el profesor registró los acontecimientos que ayudaron a recordar lo sucedido para poder realizar a posteriori el análisis de los hechos. El profesor anotó la descripción de la clase, los gestos, actitudes y los acontecimientos ocurridos. Los docentes auxiliares, comúnmente llamados ayudantes, quienes realizaron observación participante, colaboraron con el profesor para llevar las notas de campo.

### ***Análisis de los datos***

Las 25 clases fueron reconstruidas a partir de los escritos de los estudiantes y del diario del profesor. Cada clase se segmentó en episodios (N=242) tomando como marca, que durante la clase se realice un nuevo tipo de tarea, se cambie el actor principal o se estudie una nueva noción matemática o un nuevo elemento tecnológico-teórico. En cada episodio se identificó al actor principal: profesor, equipo docente, estudiante, grupo de estudiantes o toda la comunidad de estudio. Los episodios fueron analizados generándose así una construcción inductiva de categorías y subcategorías de análisis, que luego fueron transformadas en variables nominales y modalidades. Las variables corresponden a cada dialéctica, al actor principal o a la implementación, y cada una de ellas posee sus respectivas modalidades. Las modalidades de



cada variable dialéctica refieren a la forma en que dicha dialéctica se identifica en determinado episodio. Se emplearon técnicas cuantitativas de estadística multivariada tal como el análisis exploratorio de datos (Lebart; Morineau; Fénelon, 1985). Utilizando el software SPAD®, se realizaron un análisis factorial de correspondencias múltiples y una clasificación que permitieron obtener similitudes y diferencias entre los episodios, en relación con el funcionamiento de las dialécticas y una partición del conjunto de episodios en partes bien separadas.

## **Variables nominales y modalidades**

A continuación, se describen las variables nominales y sus respectivas modalidades que se sintetizan en la Tabla 01:

- *D1: Dialéctica del estudio e investigación.* Se refiere a los episodios en los que se realizan búsquedas de información en diferentes medias y estudio de saberes matemáticos o económicos para dar respuesta a las preguntas. Las modalidades son:

D1BR: Búsquedas de respuestas en diferentes medias. Se investiga en diferentes libros, en Internet, en el material teórico de la cátedra, en el material de otra cátedra, etc.

D1ER: Estudio de respuestas disponibles. Se estudian organizaciones matemáticas o económicas potencialmente útiles, por ejemplo, funciones de dos variables, derivabilidad, derivada direccional, extremos relativos, costos, costos marginales, etc.

D1NO: Identifica a los episodios en los que no funciona la dialéctica D1.

- *D2: Dialéctica del individuo y del colectivo.* Designa a los episodios en los que se argumenta acerca de las respuestas obtenidas en cada grupo de estudiantes, o cuando la argumentación se realiza hacia toda la comunidad de estudio, diferenciándose la opinión de cada grupo. Se detectan tres modalidades:

D2DC: Discusión colectiva en la comunidad de estudio. Se difunden resultados hacia la comunidad de estudio lo que conduce a una discusión entre todos los integrantes. Por ejemplo, cuando cada grupo presentó las distintas maneras de calcular costos en un microemprendimiento.

D2DG: Discusión y toma de decisiones grupales. Indica aquellos episodios en los que los miembros de un grupo de estudiantes toman decisiones o argumentan resultados, lo que



conduce a obtener una decisión o conclusión grupal. Por ejemplo, cuando los estudiantes discutieron qué microemprendimiento considerar para formular un modelo de función de costo. D2NO: Identifica a los episodios en los que no funciona la dialéctica D2.

- D3: *Dialéctica del análisis y síntesis (praxeológico y didáctico)*. Identifica el funcionamiento de D3 evidenciándose en un análisis praxeológico para decidir qué saberes matemáticos o económicos estudiar, y en una síntesis praxeológica que determina cómo y en qué medida estudiar esos saberes. Se identifican las modalidades:

D3AO: Análisis de organizaciones matemáticas o económicas. Se produce un análisis de qué estudiar de la matemática o de la económica para dar respuesta a las preguntas. Por ejemplo, al analizar la teoría en torno a las derivadas parciales se decide qué es lo útil para poder calcular costos marginales.

D3SO: Síntesis de organizaciones matemáticas o económicas. Se realiza una síntesis praxeológica, por ejemplo, cuando los estudiantes resumen cuáles son los distintos tipos de costos que se deben afrontar en un microemprendimiento.

D3AS: Análisis y síntesis de organizaciones matemáticas o económicas. Indica decidir respecto a qué y cómo estudiar una obra, por ejemplo, cuando se analiza y sintetiza la teoría en torno a las derivadas parciales para decidir qué es lo útil para responder las preguntas.

D3NO: Identifica aquellos episodios en los que no funciona la dialéctica D3.

- D4: *Dialéctica del entrar y salir del tema*. El estudio e investigación provoca el ingreso a inspeccionar distintos saberes matemáticos o económicos para luego regresar al problema inicial. Las modalidades son:

D4ME: Entrada y salida a distintas organizaciones matemáticas o económicas. Se investigan saberes matemáticos o económicos, para luego decidir si éstas contribuyen o no a una respuesta colectiva. Por ejemplo, los estudiantes consideran distintos tipos de costos, entre ellos el costo marginal, y luego ingresan a la matemática para formular una función de costo y calcular costos marginales mediante el cálculo de derivadas parciales.

D4MM: Entradas y salidas dentro de la matemática. Se producen entradas y salidas dentro de la matemática. Un ejemplo de ello es la decisión de estudiar la continuidad de la función de costo luego del cálculo de las derivadas parciales de ella.

D4NO: Identifica a los episodios en los que no funciona la dialéctica D4.



- *D5: Dialéctica del paracaidista y de las trufas.* Se inspecciona la pertinencia de una disciplina o área y se seleccionan de allí los saberes considerados útiles. Se definen tres modalidades:

D5IP: Inspección de las preguntas  $Q_0$  y derivadas. Se inspeccionan los saberes hasta determinar cuál es el adecuado para responder las preguntas. Por ejemplo, cuando los estudiantes ingresan al estudio del cálculo diferencial en dos variables para hallar costos marginales y optan por calcularlos a través de la derivación parcial.

D5IR: Inspección de respuestas disponibles. Se realiza una inspección profunda de un saber. Por ejemplo, cuando se indaga sobre si el cálculo de los costos marginales usando derivadas parciales corresponde a un resultado real o aproximado, para lo cual estudian la diferencia entre cambio real y aproximado de una función.

D5NO: No funciona la dialéctica D5.

- *D6: Dialéctica de las cajas negras y cajas claras.* Se determina cuáles son los saberes adecuados y hasta qué punto es necesario aclararlos. Se detectan tres modalidades:

D6SP: Selección de saberes pertinentes. Se decide estudiar sólo los saberes útiles para dar respuesta a las preguntas. Un ejemplo es el momento en el que los estudiantes deciden estudiar la derivabilidad de las funciones de dos variables y dejar de lado la continuidad por considerar que no aporta información útil al problema.

D6NG: Determinación del nivel de gris adecuado. Se selecciona el saber adecuado y se decide hasta qué nivel será estudiado. Por ejemplo, el momento en el que se decide realizar un estudio estimativo de costos y no un estudio exhaustivo.

D6NO: No funciona la dialéctica D6.

- *D7: Dialéctica de la lectura y escritura.* Caracteriza a los episodios en los que ocurre una lectura en diferentes fuentes de información y una extracción y transcripción de la información necesaria. Se definen cuatro modalidades:

D7LR: Lectura de respuestas disponibles. Se realiza una búsqueda y lectura de información para extraer los saberes adecuados y descartar los que no son útiles. Por ejemplo, existe una lectura de la matemática en torno al cálculo en dos variables (derivabilidad, diferenciabilidad, regla de la cadena, etc.) y de la economía referida al cálculo de costos (costos marginales, fijos, variables, etc.)



D7TR: Transcripción de respuestas parciales. Se realiza una búsqueda en diferentes sistemas de información y posterior escritura. Los estudiantes extraen lo que consideran pertinente para responder las preguntas y las transcriben en sus carpetas, a modo de resumen o síntesis, elaboran los resultados obtenidos y los interpretan.

D7ER: Elaboración de respuestas. Se escriben respuestas o se reelabora una respuesta final.

D7NO: No funciona la dialéctica D7.

- D8: *Dialéctica del media-medio*. Caracteriza a los episodios en los que los diferentes sistemas de información (media) son puestos a prueba y las respuestas obtenidas son cuestionadas, transformadas e incorporadas a la clase o comunidad de estudio (medio). Se definen cuatro modalidades:

D8PM: Participación del equipo docente como media aportando ayudas al estudio. El equipo docente responde consultas respecto a las técnicas del cálculo diferencial en dos variables: reglas de derivación, cálculo de extremos, etc.

D8ED: Participación del equipo docente incorporando al medio un nuevo elemento para su cuestionamiento. El equipo docente incorpora un nuevo elemento a la clase o realiza una propuesta pertinente para continuar en la búsqueda de respuestas. Por ejemplo, cuando la profesora propone considerar un modelo de función de costo de dos variables.

D8GA: Participación del grupo de alumnos incorporando al medio un nuevo elemento para su cuestionamiento. Los estudiantes incorporan un nuevo elemento a la clase, un nuevo sistema de información o realizan una propuesta que permite la discusión en la comunidad de estudio. Por ejemplo, el momento en el cual un estudiante propone calcular la razón de cambio del costo a través de la derivación direccional.

D8NO: No funciona la dialéctica D8.

- D9: *Dialéctica de la difusión y recepción*. Se refiere a los episodios relacionados con la difusión argumentada, oral o escrita, de las respuestas obtenidas en la comunidad de estudio. Se definen tres modalidades:

D9OR: Difusión epistémica oral. Se realiza una difusión oral de respuestas a las preguntas, argumentadas en diferentes saberes matemáticos o económicos. Se manifiesta, por



ejemplo, cuando los estudiantes escuchan, opinan y cuestionan las contribuciones de los demás grupos.

D9ES: Difusión epistémica escrita. Se realiza una producción escrita argumentada en la matemática o en la economía.

D9NO: Señala a aquellos episodios en los que no funciona la dialéctica D9.

- D10: *Dialéctica de las preguntas y respuestas*. Está relacionada con los momentos en los que se formulan preguntas o se explicitan respuestas en forma escrita u oral. Las modalidades son:

D10PR: Formulación de preguntas. Se formulan preguntas derivadas de Q<sub>0</sub>.

D10RE: Elaboración y transmisión de respuestas. Se construyen respuestas transmitidas en forma oral o escrita.

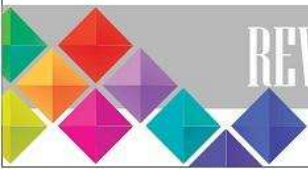
D10NO: No funciona la dialéctica D10.

- *IMPL: Implementación*. Señala en qué implementación ocurrió un episodio. Siendo dos las implementaciones llevadas a cabo, se definen las siguientes modalidades: IMPL1 (Implementación 1) e IMPL2 (Implementación 2).

- *AP: Actor principal*. Identifica cuál es el integrante de la clase que interviene como actor principal de un episodio: el profesor, el equipo docente (profesor y auxiliares de docencia), un estudiante, uno o más grupos de estudiantes o la comunidad de estudio. Las modalidades son: P (Profesor), ED (Equipo docente), A (Estudiante), GA (Grupo de estudiantes) y CE (Comunidad de estudio).

**Tabla 01:** Variables nominales y sus respectivas modalidades

Variable	Código: Modalidad
<b>D<sub>1</sub>: Estudio e Investigación</b>	D1BR: Búsquedas de respuestas en diferentes medias
	D1ER: Estudio de respuestas disponibles
	D1NO: No funciona D <sub>1</sub>
<b>D<sub>2</sub>: Individuo y Colectivo</b>	D2DC: Discusión colectiva en la comunidad de estudio
	D2DG: Discusión y toma de decisiones grupales
	D2NO: No funciona D <sub>2</sub>
<b>D<sub>3</sub>: Análisis y síntesis (praxeológico y didáctico)</b>	D3AO: Análisis de organizaciones matemáticas o económicas
	D3SO: Síntesis de organizaciones matemáticas o económicas
	D3AS: Análisis y síntesis de organizaciones matemáticas o económicas
	D3NO: No funciona D <sub>3</sub>
	D4ME: Entrada y salida a organizaciones matemáticas o económicas



<b>D<sub>4</sub>: Entrar y Salir del Tema</b>	D4MM: Entradas y salidas dentro de la matemática
	D4NO: No funciona D <sub>4</sub>
<b>D<sub>5</sub>: Paracaidistas y Trufas</b>	D5IP: Inspección de las preguntas
	D5IR: Inspección de respuestas disponibles
	D5NO: No funciona D <sub>5</sub>
<b>D<sub>6</sub>: Cajas negras y cajas claras</b>	D6SP: Selección de saberes pertinentes
	D6NG: Determinación del nivel de <i>gris</i> adecuado
	D6NO: No funciona D <sub>6</sub>
<b>D<sub>7</sub>: Lectura y Escritura</b>	D7LR: Lectura de respuestas disponibles
	D7TR: Transcripción de respuestas parciales
	D7ER: Elaboración de respuestas
	D7NO: No funciona D <sub>7</sub>
<b>D<sub>8</sub>: Media-Medio</b>	D8PM: El equipo docente aporta ayudas al estudio
	D8ED: El equipo docente incorpora un elemento para su cuestionamiento
	D8GA: Grupo de alumnos incorpora un elemento para su cuestionamiento
	D8NO: No funciona D <sub>8</sub>
<b>D<sub>9</sub>: Difusión y Recepción</b>	D9OR: Difusión epistémica oral
	D9ES: Difusión epistémica escrita
	D9NO: No funciona D <sub>9</sub>
<b>D<sub>10</sub>: Preguntas y respuestas</b>	D10PR: Formulación de preguntas
	D10RE: Elaboración y transmisión de respuestas
	D10NO: No funciona D <sub>10</sub>
<b>IMPL: Implementación</b>	IMPL1: Implementación 1
	IMPL2: Implementación 2
<b>AP: Actor Principal</b>	P: Profesor
	ED: Equipo docente
	A: Estudiante
	GA: Grupo de estudiantes
	CE: Comunidad de estudio

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se detalla la etapa de análisis que permite obtener relaciones entre las variables definidas y descriptas anteriormente.

## Análisis factorial de correspondencias múltiples

El análisis multivariado permite detectar y analizar relaciones entre más de dos variables cualitativas o categóricas en forma conjunta. En esta investigación se utiliza el Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) (Benzécri, 1980; Lebart; Morineau; Fénelon, 1985; López-Roldán; Fachelli, 2015a). La aplicación de las técnicas de AFCM a datos

provenientes de investigaciones didácticas se realiza según el criterio desarrollado por Otero, Moreira y Greca (2002) que ha sido replicado en Gazzola (2018), en Otero y Llanos (2019) y en Rangel Luengas (2022). El AFCM permite obtener ejes o factores que resultan asociados a un conjunto de variables nominales con sus respectivas modalidades. Se pueden cuantificar y representar gráficamente las similitudes y diferencias, asociaciones y oposiciones, entre las distintas modalidades de las variables, expresadas como distancias en el plano factorial. El software SPAD® fue el adoptado para el análisis.

En el AFCM es posible considerar variables activas y variables suplementarias. Las últimas poseen un rol ilustrativo, ayudan a una mejor interpretación de los factores. En esta investigación se consideran como variables activas a las dialécticas  $D_i$ ,  $i=1, \dots, 10$  y como suplementarias a Implementación y a Actor principal.

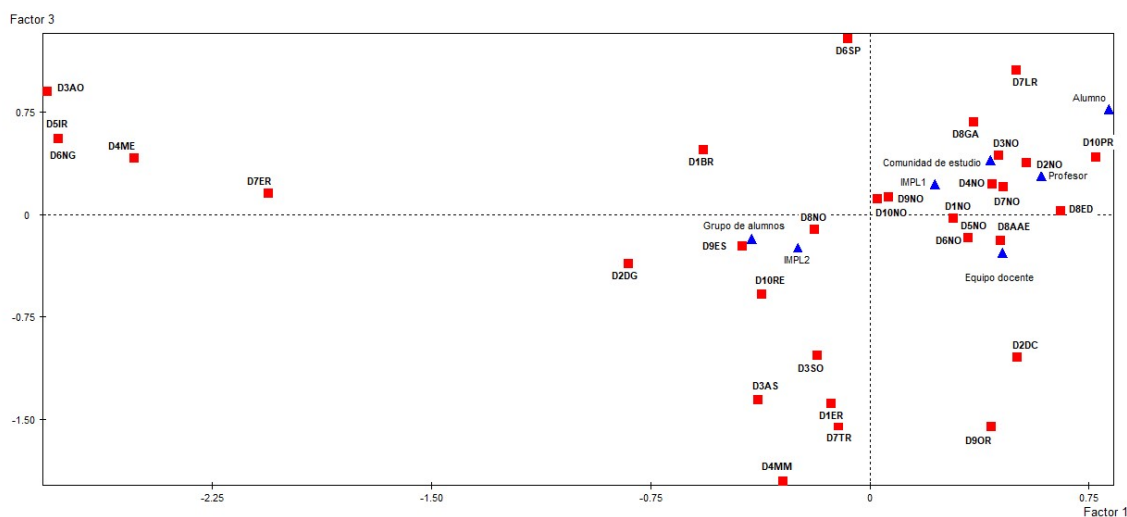
Las modalidades que se encuentran a menor distancia en el plano factorial, son las que tienen una asociación más fuerte. Cada modalidad se representa sobre el plano factorial con puntos y sus coordenadas correspondientes, cuanto mayor (en valor absoluto) es la coordenada de un punto, se entiende que dicha modalidad presenta mayores diferencias con el resto de las variables que definen dicho factor. Además, las modalidades representadas por puntos en el centro del plano tienen un efecto poco significativo, lo que se interpreta como poco peso estadístico, estas modalidades corresponden a las de mayor frecuencia que no se asocian a ningún fenómeno en particular, se encuentran en una situación de indiferencia.

A partir del AFCM es posible realizar un análisis de clúster o clasificación de los individuos analizados, en este caso se toman como individuos a los episodios donde se presenta el funcionamiento de las dialécticas (López-Roldán; Fachelli, 2015b). Se trata de clases politéticas, ya que un mismo individuo puede pertenecer a diferentes clases con diferente probabilidad, es decir no se trata de clases excluyentes. En consecuencia, el software ofrece diversos resultados, siendo el investigador quien selecciona la clasificación que mejor se ajusta al fenómeno que pretende describir, en nuestro caso, las similitudes y diferencias entre los  $N=242$  episodios de las clases, según su vinculación con las dialécticas.

## Interpretación de los planos factoriales de esta investigación

La Figura 01 presenta el plano factorial conformado por el primer y el tercer factor. Las variables activas se identifican con cuadrados rojos y las suplementarias, con triángulos azules.

**Figura 01:** Plano factorial conformado por las modalidades de las variables activas y suplementarias en los factores 1 y 3.



**Fuente:** Elaboración propia

Las variables que más contribuyen a la conformación del primer factor, en orden decreciente de contribución, son: D<sub>5</sub>: Dialéctica del paracaidista y de las trufas, D<sub>6</sub>: Dialéctica de las cajas negras y cajas claras, D<sub>4</sub>: Dialéctica del entrar y salir del tema, D<sub>7</sub>: Dialéctica de la lectura y escritura, D<sub>3</sub>: Dialéctica del análisis y síntesis (praxeológico y didáctico), D<sub>2</sub>: Dialéctica del individuo y del colectivo, D<sub>8</sub>: Dialéctica del medio-media y D<sub>10</sub>: Dialéctica de las preguntas y respuestas. Con respecto al tercer factor las variables que más contribuyen son las siguientes: D<sub>3</sub>: Dialéctica del análisis y síntesis (praxeológico y didáctico), D<sub>4</sub>: Dialéctica del entrar y salir del tema, D<sub>7</sub>: Dialéctica de la lectura y escritura, D<sub>1</sub>: Dialéctica del estudio y de la investigación, D<sub>5</sub>: Dialéctica del paracaidista y de las trufas y D<sub>6</sub>: Dialéctica de las cajas negras y cajas claras.

El AFCM genera una tabla con los valores propios y el porcentaje de inercia explicada de los factores y otra con los pesos relativos, la distancia al origen, contribución y coordenadas de cada modalidad activa, con los cuales se realiza la descripción de cada plano factorial. Para la interpretación del plano, se describe la conformación de cada eje y los semiplanos correspondientes. Luego, se identifican las modalidades ubicadas en cada cuadrante del plano estableciendo correlaciones positivas y negativas. En nuestro caso, el factor 1, situado en el eje horizontal, acumula el 60,29% de la varianza. De la observación del gráfico y los valores arrojados por el software se interpreta que:

- Las modalidades más representativas del semieje negativo, por su mayor contribución a la inercia (varianza explicada), son: determinación del nivel de gris (D6NG), inspección de respuestas disponibles (D5IR), entrada y salida a organizaciones matemáticas o económicas (D4ME), elaboración de respuestas (D7ER), análisis de organizaciones matemáticas o económicas (D3AO) y discusión y toma de decisiones grupales (D2DG). Estos resultados permiten afirmar que las principales características del extremo negativo se relacionan con profundizar en el estudio de la matemática y la economía. Los episodios asociados a este factor se caracterizan por analizar los distintos saberes matemáticos y económicos, de inspeccionarlos en profundidad, de determinar el nivel de gris adecuado, de entrar y salir de la matemática a la economía, y viceversa, de elaborar respuestas y de debatir en el interior de cada grupo diferenciándose los aportes individuales.

- En oposición, en el extremo positivo, las modalidades que más contribuyen a la inercia son: no funciona D2 (D2NO), el equipo docente incorpora un elemento para su cuestionamiento (D8ED) y formulación de preguntas (D10PR). Se deduce que este semieje se caracteriza por la formulación de preguntas y la participación del equipo docente. Los episodios comprendidos en este sector se corresponden con la formulación de preguntas derivadas de  $Q_0$ , la intervención del equipo docente incorporando, a la clase, elementos pertinentes para su cuestionamiento y, además, se destaca la discusión colectiva entre todos los integrantes de la comunidad de estudio sin diferenciarse las decisiones individuales.

El factor 3, con el 11,48% de la varianza, se ubica en el eje de las ordenadas. Se interpreta que:

- Las modalidades más representativas del semieje positivo, cuyas coordenadas indican más lejanía con el origen y mayor contribución a la inercia son: inspección de las preguntas (D5IP), selección de saberes pertinentes (D6SP), lectura de respuestas disponibles (D7LR). Este resultado significa que el extremo positivo se caracteriza principalmente por la inspección de saberes para responder las preguntas. Los episodios ubicados en este sector se destacan por inspeccionar las preguntas, realizar una lectura en diferentes sistemas de información y decidir estudiar sólo los saberes pertinentes para responder las preguntas.

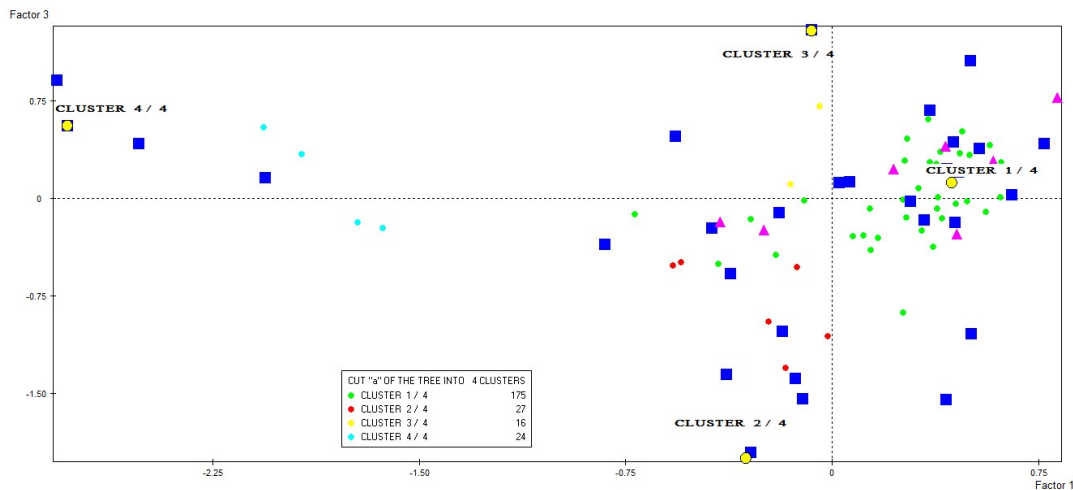
- Las modalidades que más contribuyen a la conformación del semieje negativo son: análisis y síntesis de organizaciones matemáticas o económicas (D3AS), entradas y salidas dentro de la matemática (D4MM), transcripción de respuestas parciales (D7TR) y estudio de respuestas disponibles (D1ER). Este semieje se destaca por la profundización del estudio en la matemática y se caracteriza por entradas y salidas dentro de la matemática, transcribir las respuestas parciales, analizar y sintetizar los saberes estudiados y por la elaboración de respuestas.

La descripción del plano factorial realizada anteriormente, referida a encontrar relaciones entre todas las variables, se complementa con un análisis de clúster que se presenta a continuación.

### ***Clasificación de las unidades de análisis***

El análisis factorial permite generar tipologías (Otero; Moreira; Greca, 2002) entre los individuos (en este caso, entre los 242 episodios) y las variables con sus correspondientes modalidades (López-Roldán; Fachelli, 2015b). De los resultados arrojados por SPAD® se considera que la partición en cuatro clases es la más representativa por tratarse de grupos de episodios diferenciados por ciertos fenómenos relacionados con las dialécticas. Cada grupo o clase se identifica en el plano factorial mediante un círculo amarillo (Figura 02).

**Figura 02:** Plano factorial que representa las 4 clases



**Fuente:** Elaboración propia

Los episodios se encuentran representados por puntos de diferentes colores según la clase o clúster al que pertenecen. Cada grupo de episodios, posee ciertas características asociadas a las variables y modalidades que los identifican. A continuación, se describen sus principales características:

- *Clase 1/4 - Ausencia del funcionamiento de las dialécticas.* Esta clase está conformada por el 72,31% de los episodios (175 episodios). Los episodios comprendidos en este grupo se identifican principalmente con el semieje positivo asociado a la formulación de preguntas y a la participación del equipo docente. Se corresponde fundamentalmente con episodios de la primera implementación y con la falta de funcionamiento de las dialécticas. Se advierte que hubo formulación de preguntas y lectura de respuestas disponibles en diferentes medias, pero sin llegar a dar respuesta a las cuestiones formuladas. Además, no hubo un análisis o cuestionamiento respecto a qué información era útil introducir al medio que colaborara con la búsqueda de respuestas. Tampoco se diferenciaron las decisiones individuales de las grupales debido a que seguramente se realizó un mero trabajo grupal. El profesor y el resto del equipo docente fueron los principales constructores del medio didáctico.

- *Clase 2/4 – Búsqueda de respuestas en la matemática.* Este grupo reúne al 11,16% de los episodios (27 episodios). Las modalidades que lo caracterizan son algunas que conforman el semieje de la profundización del estudio dentro de la matemática y otras que conforman el



semieje profundización del estudio en la matemática y la economía, aunque con una tendencia marcada a las primeras. Los episodios correspondientes a este grupo se identifican con decidir qué y cuánto estudiar de determinado saber para dar respuesta a las preguntas, transcribir las respuestas extraídas de diferentes medias, con la toma de decisiones en el interior de cada grupo diferenciándose los aportes individuales y con la búsqueda y estudio de respuestas disponibles. Los episodios correspondientes a esta clase pertenecen mayoritariamente a la segunda implementación y es importante la participación de los grupos de estudiantes incorporando elementos para la construcción del medio. Se interpreta que en estos episodios se produjo el funcionamiento conjunto de las dialécticas del entrar y salir del tema, de la lectura y escritura, del análisis y síntesis (praxeológico y didáctico), del individuo y del colectivo y del estudio y la investigación, por lo que se puede concluir que en estos episodios se detectaron gestos propios del desarrollo de un verdadero REI codisciplinar.

- *Clase 3/4 - Inspección de saberes.* Agrupa al 6,61% de los episodios (16 episodios). Las modalidades que identifican a esta clase se corresponden con las que conforman el semieje positivo de la inspección de saberes para responder las preguntas. Se observa que los episodios correspondientes a este grupo se identifican con gestos de las siguientes dialécticas: de las cajas negras y cajas claras, del paracaidista y de las trufas, del estudio y de la investigación y del individuo y el colectivo. Se interpreta que en estos episodios se realizó una búsqueda de respuestas en diferentes medias, una inspección desde grandes áreas del saber, se decidió estudiar sólo lo pertinente para responder las preguntas y las decisiones fueron tomadas en el interior de cada grupo, diferenciándose los aportes individuales.

- *Clase 4/4 - Búsqueda de respuestas en la matemática y en la economía.* Este grupo reúne al 9,92% de los episodios (24 episodios). Las modalidades que caracterizan a esta clase concuerdan con las que conforman el semieje negativo ligado a la profundización del estudio en la matemática y la economía. Se observan gestos propios de las dialécticas de las cajas negras y cajas claras, del paracaidista y de las trufas, del entrar y salir del tema, de la lectura y escritura, del análisis y síntesis (praxeológico y didáctico), del individuo y del colectivo y del estudio e investigación. Se interpreta que en estos episodios se realizó una inspección de respuestas disponibles, se decidió qué y cuánto estudiar de estos saberes, determinando el nivel de gris adecuado para dar respuesta a  $Q_0$  y derivadas, descartando saberes innecesarios. Además, se

elaboraron respuestas relacionándolas con la economía, específicamente con el microemprendimiento. En estos episodios, los actores principales fueron fundamentalmente los grupos de estudiantes, quienes tuvieron la responsabilidad de tomar decisiones además de diferenciar y valorar los aportes individuales.

## Discusión de los resultados

De los resultados obtenidos y respondiendo a la primera pregunta de investigación, se interpreta que existen grupos de episodios caracterizados por el funcionamiento simultáneo de algunos gestos didácticos, más que otros. Así un grupo se destaca por las entradas y salidas del tema, específicamente dentro de la matemática, y entradas y salidas de la economía a la matemática (clase 2/4), otro grupo de episodios se caracteriza por inspeccionar los saberes y decidir qué es lo pertinente para responder las preguntas (clase 3/4) y un tercer grupo, por el estudio dentro de la matemática y de la economía (clase 4/4). Por otro lado, existe un grupo (clase 1/4) caracterizado principalmente por la falta de funcionamiento de las dialécticas. Esta clasificación permite diferenciar el trabajo realizado en ambas implementaciones. La clase 2/4, identificada con la inspección de respuestas hechas dentro de la matemática y de la economía, está conformada principalmente por episodios de la segunda implementación, en la que la investigación y el estudio de saberes fue acorde con el REI codisciplinar, lo que permitió elaborar respuestas a las preguntas formuladas e interpretar los resultados dentro del contexto del microemprendimiento. Se estudiaron saberes matemáticos referidos al cálculo en dos variables (derivabilidad, continuidad, diferenciabilidad, regla de la cadena, extremos, etc.) y económicos en torno al cálculo de costos (costos marginales, totales, fijos, variables, etc.). Mientras que la clase 1/4 agrupa mayoritariamente episodios de la primera implementación. Este resultado se relaciona con que, en ciertos episodios de esta implementación, se estudiaron saberes matemáticos y económicos alejados del problema inicial, y se dejó momentáneamente de lado el cuestionamiento y la consecuente elaboración de respuestas, característica del funcionamiento de un REI.

Con respecto a las dialécticas que no funcionaron, se observa que las modalidades de la dialéctica del media-medio, no conformaron las características de ninguno de los semiejes factoriales, es decir que esta dialéctica tuvo dificultades para su funcionamiento. En los

episodios correspondientes a los grupos 2, 3 y 4 se desarrolló relativamente un REI codisciplinar, ya que se produjo el funcionamiento de las dialécticas, pero remarcando que la dialéctica del media-medio tuvo un bajo o nulo nivel de funcionamiento. Esto podría deberse a las dificultades del profesor en gestionar el dispositivo didáctico, por falta de experiencia, ya que no pudo dejar el lugar de único sistema de información autorizado de la clase, y a la resistencia de los alumnos a adaptarse a la enseñanza por indagación y abandonar su lugar habitual, relativamente más confortable y con menos responsabilidades durante la clase, donde solo se suele escuchar y registrar.

Por último, respondiendo a la segunda pregunta de investigación, los resultados confirman que hubo un mayor funcionamiento de las dialécticas en la segunda implementación, ya que en ésta las entradas y salidas a la matemática o la economía fueron motivadas por las preguntas relacionadas con un microemprendimiento, el estudio de ciertos dominios de ambas disciplinas se realizó para responder esas preguntas y los estudiantes fueron los principales protagonistas de estos gestos, produciéndose discusiones en el interior de cada grupo con el aporte individual de cada integrante. Así, la presencia activa de estos gestos didácticos establece el desarrollo de un recorrido codisciplinar genuino al menos en la segunda implementación. Con respecto a la primera implementación, más allá de que no funcionaron las dialécticas, es destacable la presencia de ciertas acciones didácticas propias de un REI, tales como el estudio e investigación, la lectura y escritura y el entrar y salir del tema.

## Conclusión

En este trabajo se presentaron resultados de dos implementaciones de un REI codisciplinar a la matemática y a la economía. Se realizó un análisis del recorrido desde el punto de vista de las dialécticas, por medio de técnicas cuantitativas multivariada. Esto permitió detectar el funcionamiento conjunto de algunas dialécticas. Los resultados muestran la activación simultánea de ciertos gestos didácticos, tales como el entrar y salir del tema, estudiar en la economía y luego en la matemática o viceversa, formular preguntas, inspeccionar los saberes profundizando en el estudio de la matemática y/o la economía, determinar qué y cuánto estudiar de los saberes útiles y realizar aportes pertinentes para la discusión. La ocurrencia

conjunta de las dialécticas, permitiría afirmar que se desarrolló un REI genuinamente codisciplinar, al menos en la segunda implementación.

La introducción de técnicas estadísticas multivariadas que nuestro equipo de investigación viene desarrollando desde hace más de veinte años (Otero, Moreira y Greca) para analizar el funcionamiento de las dialécticas contribuye al campo de la investigación en didáctica de la matemática en el nivel universitario.

## Referencias

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. **Recherches en Didactique de Mathématiques (RDM)**, Grenoble, vol. 33, no. 3, p. 307-338, 2013.

BARQUERO FARRÁS, B.; RUIZ-MUNZÓN, N.; MONREAL GALÁN, J.I.; BARAJAS, M. Un Recorrido de Estudio e Investigación sobre la comparación de realidad y previsión de la evolución de los usuarios de Facebook. **Revista del CIDUI**, no. 3, 2016.

BENZÉCRI, J. P. **Practique de l'Analyse des Données**. T 1 y 2. Paris: Dunod, 1980.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. Javier García (Éd.), **Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico**, p. 705-746, Universidad de Jaén, 2007.

CHEVALLARD, Y. Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. **Journal of Research in Mathematics Education**, vol. 2, no. 2, p. 161-182, 2013.

COSTA, V.; ARLEGO, M.; OTERO, M. R. Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. **Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria**, vol. 7, no. 1, p. 20-40, Universidad de Vigo, 2014.

ESPINOZA MELO, C.; SÁNCHEZ SOTO, I. Eficacia de un Recorrido de Estudio e Investigación en el desarrollo de estrategia de aprendizaje y tipo de aprendizaje. **Revista Espacios**, vol. 38, no. 6, 2017.

FONSECA, C.; CASAS, J. M.; INSUA, M. A. El matemático como un profesional en los Recorridos de Estudio e Investigación. **ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura**, vol. 187(Extra\_3), p. 279-284, 2011.

GAZZOLA, M.P. **Diseño, implementación y análisis de un Recorrido de Estudio e Investigación codisciplinar en matemática y física en la Escuela Secundaria**. Tesis (Doctorado en Enseñanza de las Ciencias - Mención Matemática). Tandil: UNICEN, 2018.

GAZZOLA, M. P.; OTERO, M. R.; LLANOS, V. C. The characteristics didactic gestures of a Study and Research Path involving mathematics and physics at secondary school. **Open Access Publishing Group. European Journal of Education Studies**, vol. 6, no. 7, p. 491-502, 2019.

GAZZOLA, M. P.; OTERO, M. R.; LLANOS, V. C. Acciones didácticas en el desarrollo de un recorrido de estudio y de investigación que involucra a la matemática y a la física en la escuela secundaria. **Perspectiva Educacional**, Valparaíso, vol. 59, p. 52 – 80, 2020.

LEBART, L.; MORINEAU A.; FÉNELON, J. P. **Tratamiento Estadístico de Datos**. Barcelona: Marcombo, 1985.

LÓPEZ-ROLDÁN, P.; FACHELLI, S. Análisis factorial. En P. López-Roldán y S. Fachelli, **Metodología de la Investigación Social Cuantitativa**, Bellaterra (Cerdanyola del Vallès): Dipòsit Digital de Documents, Universitat Autònoma de Barcelona, Capítol III.11, 1a edició, 2015a.

LÓPEZ-ROLDÁN, P.; FACHELLI, S. Análisis de clasificación. En P. López-Roldán y S. Fachelli, **Metodología de la Investigación Social Cuantitativa**, Bellaterra (Cerdanyola del Vallès): Dipòsit Digital de Documents, Universitat Autònoma de Barcelona, Capítol III.12, 1a edició, 2015b.

OLIVEIRA LUCAS, C. **Una posible “razón de ser” del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional**. Tesis doctoral, Universidad de Vigo, Departamento de Matemática Aplicada I, 2015.

OTERO, M. R.; LLANOS, V. C. Formación de Profesores de Matemática en servicio: la organización de una enseñanza basada en preguntas. **REDIMAT–Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas**, vol. 8, no. 2, p. 193–225, 2019.

OTERO, M. R.; MOREIRA, M. A.; GRECA, M. I. El uso de imágenes en textos de física para la enseñanza secundaria y universitaria. **Investigações em Ensino de Ciências**, vol. 7, no. 2, p. 127-154, 2002.

PARRA, V.; OTERO, M. R. Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas”. **Educación matemática**, vol. 29, no. 3, p. 9-49, México, 2017.

PARRA, V.; OTERO, M. R. Antecedentes de los recorridos de estudio e investigación (REI): características y génesis. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, vol. 13, no. 2, p. 1-18, 2018.

RANGEL-LUENGAS, J. S. **Análisis, clasificación y caracterización de la Opinión de los profesores colombianos sobre la Enseñanza de la Matemática por Competencias desde la Teoría de los Campos Conceptuales**. Tesis (Doctorado en Enseñanza de las Ciencias - Mención Matemática). Tandil: UNICEN, 2022.

SALGADO, D. **Diseño, implementación, análisis y evaluación de un Recorrido de Estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo en dos variables.** Tesis (Doctorado en Enseñanza de las Ciencias - Mención Matemática). Tandil: UNICEN, 2019.

SALGADO, D.; OTERO, M. R. Enseñanza por investigación en un curso de matemática de nivel universitario: los gestos didácticos esenciales. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, vol. 22, no. 1, p. 532-557, 2020.

SALGADO, D.; OTERO, M. R.; PARRA, V. A praxeological model of reference related to costs calculation: comparison with the ones developed in a research and study path at university level. **Revista UNION**, vol. 15, no. 55, p. 54-70, 2019.